Devoir I

Dû le jeudi 26 septembre 2013 en classe

Instructions : Il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = 6x - 1$ pour $x \in [0, 1]$. Calculer la somme supérieure $S(f, P)$ pour la partition $P = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$.
2. (cf. Exercice 3, §6.3.1, p.196 dans [1] pour un problème similaire) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{autrement.} \end{cases}$$

   Montrer que f est intégrable et calculer son intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour $x \in [a, b]$, montrer que f est continue en x si et seulement si $\omega f(x) = 0$, où $\omega f(x)$ est l'oscillation de f en x.
   Rappel : l'oscillation de f sur un intervalle I est donnée par

$$\omega f(I) = \sup\{|f(t) - f(s)| \quad | \; t, s \in [a, b] \cap I\}$$

   et l'oscillation de f en un point $x \in [a, b]$ est donnée par

$$\omega f(x) = \inf\{\omega f((x - \delta, x + \delta)) \mid \delta > 0\}.$$

4. Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, montrer que la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(f(x)^2 + 1\right)$ est intégrable sur $[a, b]$.
5. Soient $B \subset \mathbb{R}$ un ensemble de mesure nulle et $A \subset B$. Montrer que A est aussi de mesure nulle.
6. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. En utilisant le critère de Lebesgue ou autrement, montrer que la fonction h définie par $h(x) = f(x)g(x)$ est aussi intégrable.
7. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

   Quelle est l'oscillation de f en $x = 0$?

8. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas de mesure nulle.
   Suggestion : Appliquer le critère d'intégrabilité de Lebesgue à la fonction de Dirichlet.
9. Soient $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ telles que $f(x) \geq g(x)\ \forall\ x \in [a,b]$. Montrer alors que
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$
10. (Ensemble de Cantor) On dénote par $\mathcal{T}$ l'opérateur qui à un intervalle $[a,b]$ lui enlève le tiers central :
$$\mathcal{T}([a,b]) = [a, a + \frac{b-a}{3}] \cup [a + \frac{2}{3}(b-a), b].$$
Si $I = \bigcup_{j=1}^k I_j$ est une union disjointe d'intervalles fermés I_j, on définit plus généralement $\mathcal{T}(I)$ par
$$\mathcal{T}(I) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{T}(I_j).$$
En prenant comme terme initial $A_0 = [0,1]$, on définit par récurrence une suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles fermés par $A_{n+1} = \mathcal{T}(A_n)$. L'ensemble de Cantor est alors donné par :
$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$
   (a) Montrer que A est un ensemble de mesure nulle.
   (b) Montrer que l'ensemble de Cantor est aussi donné par
$$A = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid x_n \in \{0,2\}\}.$$
   En déduire par l'argument de diagonalisation de Cantor que A n'est pas un ensemble dénombrable.

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.