Devoir II

Dû le jeudi 7 novembre 2013 en classe

Instructions : En 1875, Gaston Darboux a donné un exemple d'une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$ (voir p. 109 dans son mémoire [1]). En particulier, cette fonction n'est continue sur aucun intervalle. L'objectif de ce devoir est de construire une variante de cet exemple. Il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue partout sauf en $x = 0$. En classe, on a montré il y a quelques semaines que cette fonction possède une primitive donnée par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Pour $a \in (0,1)$ fixé, considérons la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \quad \text{avec} \quad \varphi_n(x) := \frac{a^n}{n} F(\sin(n\pi x)). \tag{1}$$

1. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que
$$|\varphi_n(x)| \leq K \frac{a^n}{n}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction φ_n est différentiable partout sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par
$$\varphi_n'(x) = \pi a^n f(\sin(n\pi x)) \cos(n\pi x).$$
En déduire que
$$|\varphi_n'(x)| \leq \pi a^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
4. Montrer que la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de φ_n' est donné par

$$\mathcal{D}(\varphi_n') = \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

6. Montrer que φ_n' est intégrable sur $[a, b]$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
7. Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que H est différentiable partout sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$H'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi a^n f(\sin(n\pi x)) \cos(n\pi x). \tag{2}$$

8. Montrer que la fonction H' est continue en x lorsque x est un nombre irrationnel.
9. Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$ quelconque. Montrer alors que H' n'est pas continue en x_0. En conclure que l'ensemble des points de discontinuité de H' est précisément $\mathcal{D}(H') = \mathbb{Q}$.
10. Montrer que la fonction H' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tout intervalle borné et fermé $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et pour tout $M \in \mathbb{R}$ strictement compris entre $H'(a)$ et $H'(b)$, il existe $c \in (a, b)$ tel que $H'(c) = M$.

Références

[1] Gaston Darboux. Mémoire sur les fonctions discontinues. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (2)*, 4 :57–112, 1875.