Devoir III

Dû le jeudi 28 novembre 2013 en classe

Il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

On considère l'équation de la chaleur dans une tige de longueur ℓ constituée d'un matériau homogène dont l'un des bouts est isolé alors que l'autre est maintenu à température nulle :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t), & x \in [0,\ell], \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0,\ T(\ell,t) = 0, & \forall t \in [0,\infty),\ \text{(conditions aux bords)} \\ T(x,0) = u(x), & \text{(température initiale)} \end{cases} \tag{*}$$

où x est la position sur la tige, t est le temps, $T(x,t)$ est la température de la tige en x au temps t, u est la distribution de température initiale dans la tige et κ est une constante positive. On dénotera par $\mathcal{C}^{2,1}([0,\ell]\times[0,\infty))$ l'espace des fonctions f telles que

$$f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in \mathcal{C}^0([0,\ell]\times[0,\infty)).$$

1. Si $T \in \mathcal{C}^{2,1}([0,\ell]\times[0,\infty))$ est une solution de (*), montrer que la fonction

$$F(t) := \int_0^\ell (T(x,t))^2 dx$$

est telle que $F'(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0,\infty)$.

2. Supposons que la température initiale u dans (*) est telle que $u \in \mathcal{C}^2([0,\ell])$ avec $u'(0) = u(\ell) = 0$. Montrer alors que (*) possède au plus une solution T dans l'espace $\mathcal{C}^{2,1}([0,\ell]\times\mathbb{R})$.

3. En faisant fi de la température initiale u, utiliser la méthode de séparation des variables pour trouver toutes les solutions de (*) de la forme $T(x,t) = f(x)g(t)$ pour $f \in \mathcal{C}^2([0,\ell])$ et $g \in \mathcal{C}^1([0,\infty))$ des fonctions d'une variable telles que

$$f''(x) = -\nu^2 f(x), \quad g'(t) = -\kappa\nu^2 g(t)$$

pour un certain $\nu > 0$.

4. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,\ell])$ une fonction telle $u(\ell) = u''(\ell) = 0$ et $u'(0) = 0$. Montrer que u est la restriction d'une fonction $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ qui est paire, périodique de période 4ℓ et telle que $\widetilde{u}(x+\ell) = -\widetilde{u}(-x+\ell)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,\ell])$ une fonction telle $u(\ell) = u''(\ell) = 0$ et $u'(0) = 0$. Montrer que la série de fonctions
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2\ell}x\right), \quad \text{avec} \;\; a_{2n+1} := \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u(x)\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2\ell}x\right)dx$$
converge uniformément vers u sur $[0,\ell]$.
6. Supposons que la température initiale soit donnée par une fonction $u \in \mathcal{C}^4([0,\ell])$ telle que $u'(0) = u^{(3)}(0) = u(\ell) = u''(\ell) = u^{(4)}(\ell) = 0$. Montrer alors que l'équation de la chaleur (*) possède une solution unique T dans l'espace $\mathcal{C}^{2,1}([0,\ell]\times[0,\infty))$.
7. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $t_0 > 0$, montrer qu'il existe une constante C_{m,t_0} dépendant de m et t_0 telle que pour tout $t \geq t_0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on ait
$$e^{-t\kappa\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2}\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2m} \leq C_{m,t_0}\frac{\ell^2}{\pi^2 n^2}.$$
8. Pour $t_0 > 0$, montrer que la solution T du numéro 6 est indéfiniment différentiable sur $[0,\ell]\times[t_0,\infty)$, c'est-à-dire que sa restriction à $[0,\ell]\times[t_0,\infty)$ appartient à $\mathcal{C}^k([0,\ell]\times[t_0,\infty))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
9. Supposons que la température initiale soit donnée par la fonction $u(x) = \ell^2 - x^2$. Déterminer la solution T de l'équation de la chaleur (*) explicitement en termes d'une série de Fourier dont vous aurez soigneusement calculé chacun des coefficients.
10. Pour la solution T du numéro précédent, calculer $\lim_{t\to\infty} T(x,t)$ pour $x \in [0,\ell]$ et donner une interprétation physique de ce résultat.