Séance de travaux pratiques I

Le jeudi 12 septembre 2013

1. Soient A et B deux sous-ensembles non-vides de $\mathbb{R}$. Si $A \subset B$ et B est borné, alors montrer que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.
2. Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$. Supposons que les ensembles $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ et $g(D) = \{g(x) \mid x \in D\}$ sont bornés. Montrer que :
   (a) si $f(x) \leq g(x) \ \forall\, x \in D$, alors $\sup f(D) \leq \sup g(D)$;
   (b) si $f(x) \leq g(y) \ \forall\, x, y \in D$, alors $\sup f(D) \leq \inf g(D)$.
3. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ des fonctions bornées sur D. Montrer que :
   (a) $\sup\{f(x) + g(x) \mid x \in D\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in D\} + \sup\{g(x) \mid x \in D\}$,
   (b) $\inf\{f(x) + g(x) \mid x \in D\} \geq \inf\{f(x) \mid x \in D\} + \inf\{g(x) \mid x \in D\}$.

   Trouver des exemples où les inégalités sont strictes.
4. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur A. Montrer que :
   (a) $\sup_{x \in A} k f(x) = k \sup_{x \in A} f(x)$ et $\inf_{x \in A} k f(x) = k \inf_{x \in A} f(x)$ si $k > 0$;
   (b) $\sup_{x \in A} k f(x) = k \inf_{x \in A} f(x)$ et $\inf_{x \in A} k f(x) = k \sup_{x \in A} f(x)$ si $k < 0$.
5. Trouver les points de discontinuité de la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   et déterminer si cette fonction est intégrable au sens de Riemann.
6. Trouver les points de discontinuité de la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

7. Montrer qu'un ensemble d'intervalles ouverts disjoints deux à deux de nombres réels est dénombrable.
8. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée dont la seule discontinuité est en $x = b$. Montrer que f est intégrable en utilisant le critère de Riemann.