Séance de travaux pratiques XI

Le jeudi 28 novembre 2013

1. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble de mesure nulle au sens où on l'a vu au début du cours. Montrer que $\mathfrak{m}^* E = 0$.
2. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble tel que $\mathfrak{m}^* E = 0$. Montrer que E est mesurable. Montrer aussi que E est de mesure nulle au sens où on l'a vu au début du cours.
3. Montrer que l'ensemble de Cantor du numéro 10 du Devoir I est de mesure nulle en montrant que sa mesure extérieure est nulle.
4. Si $\mathfrak{m}^* A = 0$, montrer alors que $\mathfrak{m}^*(A \cup B) = \mathfrak{m}^* B$.
5. Soit $E \subset \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, considérons l'ensemble $E + x := \{e + x \mid e \in E\}$.
   (a) Montrer que $\mathfrak{m}^*(E + x) = \mathfrak{m}^* E$.
   (b) Si E est mesurable, montrer que $E + x$ est aussi mesurable.
6. Soient $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ des ensembles mesurables. Montrer alors que
$$\mathfrak{m}(E_1 \cup E_2) + \mathfrak{m}(E_1 \cap E_2) = \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2$$
7. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, considérons la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer que chaque classe d'équivalence possède un représentant dans $[0, 1)$.
   (b) En invoquant l'axiome du choix, construire un sous-ensemble $P \subset [0, 1)$ possédant exactement un représentant dans chaque classe d'équivalence.
   (c) Pour $x, y \in \mathbb{Q}$, montrer que
$$(P + x) \cap (P + y) \neq \emptyset \implies x = y.$$
   (d) Montrer que l'union disjointe $E = \bigcup_{y \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (P + y)$ est telle que $[0, 1] \subset E \subset [-1, 2]$, et donc que $1 \leq \mathfrak{m}^* E \leq 3$.
   (e) Montrer que si P était mesurable, alors par le numéro 5,
$$\mathfrak{m}E = \sum_{y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \mathfrak{m}(P + y) = \sum_{y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \mathfrak{m}(P),$$
   ce qui impliquerait que E ne pourrait être que de mesure nulle ou de mesure infinie. À la lumière des inégalités obtenues en (d), en conclure que P n'est pas mesurable.
8. Donner un exemple de deux ensembles disjoints E_1, E_2 dans $\mathbb{R}$ tels que
$$\mathfrak{m}^*(E_1 \cup E_2) < \mathfrak{m}^* E_1 + \mathfrak{m}^* E_2.$$