Séance de travaux pratiques XII

Le jeudi 5 décembre 2013

1. Soit $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables emboîtés, c'est-à-dire que $E_{n+1} \subset E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathfrak{m}E_1 < +\infty$, montrer que
$$\mathfrak{m}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}E_n.$$
2. Si $f_n : D \to \mathbb{R}$ est une suite de fonctions mesurables, montrer que $g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est une fonction mesurable.
3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $g : D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $g(x) = f(x)$ presque partout, c'est-à-dire que l'ensemble $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ est de mesure nulle. Montrer alors que g est aussi une fonction mesurable.
4. Soit $f : D \to [0, +\infty)$ une fonction mesurable.
   (a) Si $\int_D f = 0$, montrer que pour $\alpha > 0$, l'ensemble $\{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\}$ est de mesure nulle.
   (b) Conclure que $f(x) = 0$ presque partout si et seulement si $\displaystyle\int_D f = 0$.
5. Soit $f_n : D \to [0, +\infty)$ une suite de fonctions mesurables convergeant ponctuellement vers une fonction $f : D \to [0, +\infty)$. Si $f_n(x) \leq f(x)$ pour tout n et tout x, montrer alors que $\displaystyle\int_D f = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n$.
6. Donner un exemple d'une suite croissante de fonctions $f_n : [0, 1] \to [0, +\infty)$ intégrables au sens de Riemann convergeant ponctuellement vers une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui n'est pas intégrable au sens de Riemann. Cela montre qu'il n'y a pas de «théorème de convergence monotone» pour l'intégrale de Riemann.
7. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer alors que $|f|$ est une fonction mesurable.
8. Soit $f_n : D \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que
$$\lim_{n\to\infty} \int_D |f - f_n| = 0.$$
   (a) Montrer que f_n converge vers f en mesure, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq N \implies \mathfrak{m}\{x \mid \ |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\} < \epsilon.$$
   (b) En déduire qu'il existe une sous suite f_{n_k} convergeant vers f presque partout.