Séance de travaux pratiques II

Le jeudi 19 septembre 2013

1. Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ telle que $f(x)=0$ pour tout $x \in [a,b]$ avec $x \neq c_1, \ldots, c_k$. Montrer que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$.
2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et g une fonction bornée sur $[a,b]$ égale à f sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points. Montrer que $g \in \mathcal{R}[a,b]$ et que
$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$
3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et g une fonction bornée sur $[a,b]$ qui coïncide avec f sur $[a,b]$ sauf pour un ensemble dénombrable de points de $[a,b]$. Peut-on en déduire que $g \in \mathcal{R}[a,b]$?
4. Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de mesure nulle dans $\mathbb{R}$. Montrer alors que leur union $A = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ est aussi un ensemble de mesure nulle.
5. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$.
6. Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. Montrer alors que l'oscillation de f sur $[a,b]$ est donnée par $\omega f([a,b]) = M - m$ où
$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \quad \text{et} \quad m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$
7. Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ avec une discontinuité de première espèce en $c \in (a,b)$. Montrer que si $f(c)$ est entre $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$, alors l'oscillation de f en c est donnée par la valeur absolue du saut de la discontinuité en c :
$$\omega f(c) = |s(f,c)| = |\lim_{x\to c^+} f(x) - \lim_{x\to c^-} f(x)|.$$
8. Donner un exemple d'une fonction bornée et monotone croissante $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ayant un nombre infini de discontinuités.