Séance de travaux pratiques III

Le jeudi 26 septembre 2013

1. Montrer que la fonction f donnée par
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
satisfait à la propriété des valeurs intermédiaires bien qu'elle soit discontinue en $x = 0$.
2. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Montrer que $\sqrt[3]{f}$ est intégrable sur $[a, b]$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = 0$ si et seulement si $f(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$.
4. Soit $f \in \mathcal{R}[a, b]$ une fonction intégrable telle que $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt = 0$. Peut-on conclure que $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$?
5. On définit la fonction ln : $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ par $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$.
   (a) Montrer que ln est différentiable et que sa dérivée est $\dfrac{1}{x}$.
   (b) Montrer que c'est une fonction monotone strictement croissante. En déduire que c'est une fonction injective.
   (c) Montrer que $\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y > 0$.
   (d) Montrer que l'image de ln est $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x > 0$ tel que $y = \ln x$.
   (e) Soit exp : $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ l'inverse de la fonction ln. Montrer que exp est différentiable et que sa dérivée est aussi exp.
   (f) Montrer que $\exp(0) = 1$ et que $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.
6. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que
$$\int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx.$$
7. Pour $a, b > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^b e^x |\sin x|^a dx \leq e^b - 1$.