Séance de travaux pratiques IV

Le jeudi 3 octobre 2013

1. Parmi les intégrales suivantes, déterminer lesquelles convergent et calculer leur valeur le cas échéant :
   (a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$,
   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$,
   (c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x dx$,
   (d) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x dx$.
2. Déterminer lesquelles des séries numériques suivantes convergent :
   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos \pi n}{n}$.
3. Est-ce que la fonction de Dirichlet possède une primitive ?
4. (cf. Exemple 6.44 dans [1]) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   Montrer que cette fonction est différentiable, mais que sa dérivée n'est pas bornée, donc en particulier n'est pas intégrable.
5. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{autrement.} \end{cases}$$
   n'est pas continue en $x = 0$.
6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction localement bornée, c'est-à-dire que pour tout $x \in [a,b]$ il existe $\delta > 0$ tel que f est bornée sur $(x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]$. Montrer alors en utilisant le théorème de Heine-Borel que f est bornée sur $[a,b]$.
7. En classe, on a vu qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est fermé si son complément $\mathbb{R} \setminus E$ est ouvert. Montrer qu'un ensemble est fermé si et seulement si pour toute suite $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$, on a nécessairement que $e \in E$ (cf. Théorème 2.16 dans [1]).

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.