# Séance de travaux pratiques VI

Le jeudi 24 octobre 2013

1. (Exercice 2, p.291 dans [1]) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par respectivement
$$\text{a) } f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad \text{b) } f_n(x) = (\sin \pi x)^n.$$
Est-ce que la suite des dérivées $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?
2. (Exercice 4, p.291 dans [1]) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ définies par
$$f_n(x) = \frac{n + \sin 2x}{3n + 4\cos^2 2x}.$$
Montrer que la convergence de cette suite est uniforme et trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_3^8 f_n(x)dx$.
3. (Exercice 5, p.291 dans [1]) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par
$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2 + \cos^2 3x}.$$
Cette suite de fonctions converge-t-elle uniformément sur $(0,\infty)$ et sur $[a,\infty)$, $a > 0$ ? Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{27+\pi^3}^{44+\pi^4} f_n(x)dx$.
4. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ convergeant ponctuellement vers une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $x \in [a,b]$ et pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b]$ convergeant vers $x$, on ait que $f_n(x_n) \to f(x)$. Montrer alors que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$.
5. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $k$ fois différentiables sur $[a,b]$. Supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $|f_n^{(j)}(x)| < K$ pour tout $x \in [a,b]$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \{0,1,\ldots,k\}$ . Montrer alors qu'on peut extraire une sous-suite $\{f_{n_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une fonction $f$ qui est $k-1$ fois différentiable. Montrer aussi que pour $j = 1,\ldots,k-1$, la sous-suite des $j$ ièmes dérivées $\{f_{n_\ell}^{(j)}\}$ converge uniformément vers $f^{(j)}$.
6. Étudier la convergence uniforme des séries de fonctions suivantes :
$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2},\ x \in \mathbb{R}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right),\ x \in [0,1], \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n},\ x \in (1,\infty).$$

# Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.