Séance de travaux pratiques VII

Le jeudi 31 octobre 2013

1. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Supposons que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Montrer alors que
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a.$$

2. (Exercice 1, p.299 dans [1]) Trouver la région de convergence des séries de fonctions suivantes :
$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\sin x}}, \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right).$$

3. Étudier la convergence uniforme des séries de fonctions suivantes :
$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2},\ x \in \mathbb{R}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right),\ x \in [0,1], \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n},\ x \in (1,\infty).$$

4. (Exercice 2, p. 299 dans [1]) À l'aide du critère de Weierstrass, montrer que les séries ci-dessous convergent uniformément sur l'intervalle donné :
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad x \in [-1,1],$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in [-7,7],$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{a^n}, \quad x \in (-\infty,b),\ b < \ln a,\ a > 0,$
   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x\ln x)^n, \quad x \in (0,1].$

5. (Exercice 2ab, p.324 dans [1]) Établir les égalités ci-dessous :
$$\text{a)} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^3}, \quad \text{b)} \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} = -\sum \frac{\log n}{n^x}, \quad x > 1.$$

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.