Séance de travaux pratiques VIII

Le jeudi 7 novembre 2013

1. Déterminer les rayons de convergence des séries de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec a_n donné par

$$\text{a) } \frac{1}{n^n} \quad \text{b) } \frac{n^n}{n!} \quad \text{c) } \frac{n}{2^n} \quad \text{d) } \frac{n^2}{2^n} \quad \text{e) } \frac{1}{\ln n} \text{ avec } n \geq 2.$$

2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme d'une série de puissances de rayon de convergence $R > 0$. Si $f(x) = f(-x) \ \forall \ x \in (-R, R)$, montrer alors que $a_{2n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (cf. exercice 1, p.308 dans [1]) Déterminer l'intervalle de convergence des séries

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}(x-1)^n \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n} \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 e^n}{n!} x^n.$$

4. Trouver la série de Taylor de la fonction $f(x) = \ln x$ centrée en $x = 1$, c'est-à-dire de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$. Trouver le rayon de convergence R de cette série. Montrer que cette série converge vers $\ln x$ pour $x \in (1-R, 1+R)$.
5. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

est indéfiniment différentiable avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Conclure que la série de Taylor de f ne converge pas vers $f(x)$ pour $x > 0$.
6. Trouver la série de Taylor en $x = 0$ de la fonction $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Déterminer si la série de Taylor converge vers la fonction f dans son intervalle de convergence.

Références

[1] J. Labelle et A. Mercier. *Introduction à l'analyse réelle.* Modulo, 1993.