Séance de travaux pratiques IX

Le jeudi 14 novembre 2013

1. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur $D \subset \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction bornée $f : D \to \mathbb{R}$. Montrer alors que la suite $\{f_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation $f'(x) = \lambda f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ forme un espace vectoriel de dimension complexe 1 donné par $\{ce^{\lambda x} \mid c \in \mathbb{C}\}$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une fonction périodique de période 2ℓ telle que $f'' = \mu f$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mu \leq 0$ à moins que $f(x) = 0$ pour tout x. De plus, si $\mu = 0$, montrer qu'alors f est une fonction constante.
4. Pour $\nu > 0$, considérons l'équation
$$f''(x) = -\nu^2 f(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
   (a) En posant $\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$, montrer que (1) équivaut à l'équation
$$\frac{d\vec{v}}{dx}(x) = A\vec{v}(x), \qquad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
   (b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A et montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (2) à valeur dans $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel complexe de dimension complexe 2.

   (c) Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réels de (1) est l'espace vectoriel réel $\{a\cos\nu x + b\sin\nu x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

   (d) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est une fonction périodique de période 2ℓ qui est une solution de (1), alors $\nu = \frac{\pi n}{\ell}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer quelle est la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. En déduire la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
6. Calculer les coefficients de la série de Fourier de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi], \\ -1, & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$
   En déduire la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.