Devoir I

Dû le mardi 16 février 2021 par courriel

Instructions : En tenant compte des sous-questions, il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. L'isotope radioactif du carbone ^{14}C a une demi-vie de 6000 ans. Cette isotope est présent dans les plantes et les animaux. Toutefois, lorsque qu'une plante ou un animal meurt, le carbone cesse d'être remplacé et la proportion m de carbone ^{14}C diminue selon un processus de décroissance radioactive modélisé par l'équation différentielle
$$\frac{dm}{dt} = -km$$
où k est une constante positive. Si le squelette d'un castor géant de 2m de long (Ça a vraiment existé !) est retrouvé lors de fouilles achéologiques et qu'il ne contient que 25% de la quantité de ^{14}C normalement contenue dans les os d'un animal vivant, quand ce castor géant a-t-il perdu la vie ?

2. Georgette a contracté un prêt hypothécaire afin de s'acheter une maison. Si $H(t)$ est le montant à rembourser au temps t (mesuré en années), r est le taux d'intérêt annuel appliqué continûment et τ est le taux de remboursement annuel de Georgette réparti de façon continue au cours de l'année, alors $H(t)$ est solution de l'équation différentielle
$$\frac{dH}{dt} = rH - \tau. \tag{1}$$
   (a) Si le montant emprunté initialement au temps $t = 0$ est H_0, déterminer $H(t)$ en résolvant l'équation (1).
   (b) Déterminer le temps T qu'il faudra pour que Georgette ait complètement remboursé son prêt hypothécaire en termes de H_0, r et τ (Indice : T est tel que $H(T) = 0$). Si $H_0 = 400000\$$, $r = 5\% = 0,05$ et $\tau = 24000\$/\text{année}$, quel est la valeur de T ?

3. Supposons que la population d'une certaine espèce de poisson dans une certaine zone maritime, par exemple la morue dans le golf du Saint-Laurent, satisfait à l'équation différentielle
$$\frac{dy}{dt} = r(1 - \frac{y}{K})y - Ey,$$
où r, K et E sont des constantes strictement positives et t est mesuré en années. C'est le modèle de Schaefer, du nom du biologiste M.B. Schaefer qui l'a appliqué à l'étude des populations de poissons. Dans ce modèle, le terme Ey, qu'on suppose proportionnel à la population de poissons, correspond au nombre de Poissons péchés au cours d'une année.

(a) Résoudre cette équation si $E \neq r$.

(b) Si $E < r$, montrer que la population de poissons tend vers une certaine valeur strictement positive lorsque t est assez grand. Qu'arrive-t-il si on a plutôt $E > r$?

4. Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

pour les conditions initiales $y(0) = 0$ et $\dfrac{dy}{dt}(0) = 0$. Pour ce faire, il pourrait être utile de d'abord résoudre l'équation différentielle correspondante pour la fonction $v(t) = \dfrac{dy}{dt}$.

5. Trouver la solution générale, possiblement sous forme implicite, de l'équation différentielle

$$(1 + x)e^{x+y} + (xe^{x+y} + 1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

6. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 28y = 0$$

en recherchant d'abord des solutions de la forme e^{rx} pour $r \in \mathbb{R}$.

7. Calculer le wronskien des fonctions $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ et $g(x) = 1 + x^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et déterminer si elles sont linéairement indépendantes.

8. À une constante multiplicative près, déterminer le wronskien de l'équation de Legendre

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx} + -2x\frac{dy}{dx} + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \quad x \in (-1, 1),$$

sans la résoudre, par exemple en utilisant le théorème d'Abel.