Devoir II

Dû au plus tard le mardi 13 avril 2021 sur Moodle

Instructions : Il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. Calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } 0 \leq t \leq 2\pi, \\ 0 & \text{si } t > 2\pi. \end{cases}$

2. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation $y'' - y = r(t)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ si $r(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ t & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$

3. En utilisant la troisième loi de Kepler (équation (2.38) dans les notes de cours), estimer la masse du Soleil, sachant que le demi-grand axe de l'orbite de la Terre est d'environ $1,496 \times 10^{11} m$ et que la valeur de la constante gravitationnelle est de $G = 6,673 \times 10^{-11} m^3/(kg \cdot s^2)$.

4. Soit l'équation différentielle $y'' - xy = 0$.
   (a) Si $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une solution analytique de l'équation près de $x = 0$, trouver la relation de récurrence satisfaite par les coefficients a_n et montrer que nécessairement $a_2 = 0$.
   (b) Trouver la solution générale de l'équation sous forme de séries entières.

5. Trouver la solution générale de l'équation $x^2y'' + 7xy' + 10y = 0$ pour $x > 0$.

6. Soit l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$.
   (a) Montrer que $x = 0$ est un point singulier régulier de l'équation et déterminer l'équation indicielle correspondante.
   (b) Utiliser la méthode de Frobenius pour trouver la solution générale de l'équation pour $x > 0$.

7. Utiliser la méthode de Frobenius pour trouver une solution non triviale à l'équation

$$x^2y'' - 3xy' + (4x + 4)y = 0$$

pour $x > 0$.

8. Soit l'équation $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$
   (a) Si $\vec{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{dx}{dt}(t) \end{pmatrix}$, trouver une matrice $\mathbf{A}$ telle que $\dfrac{d\vec{\mathbf{y}}}{dt} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}$.
   (b) Trouver les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
   (c) Pour chaque valeur propre, trouver un vecteur propre correspondant.
   (d) Donner une formule explicite pour $e^{t\mathbf{A}}$.

9. On considère le système d'équations différentielles

$$\frac{d\vec{\mathbf{y}}}{dt} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Trouver trois solutions linéairement indépendantes de la forme $\vec{\mathbf{y}}(t) = e^{\lambda t}\vec{\mathbf{v}}$ où $\vec{\mathbf{v}}$ est un vecteur constant.
   (b) Trouver l'unique solution $\vec{\mathbf{y}}(t)$ telle que $\vec{\mathbf{y}}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. Les positions de deux masses attachées à des ressorts satisfont au système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2x_1 + x_2,$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = x_1 - 2x_2.$$

   Trouver la solution générale de ce système d'équations.