Examen final

Le lundi 24 avril 2017, 13h30 à 16h30 au PK-R605

Instructions : Il y a 5 problèmes. Chaque problème vaut 20 points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Aucune documentation n'est permise, sauf un aide-mémoire écrit à la main sur une feuille $8\frac{1}{2} \times 11$ recto-verso. Aucune calculatrice et aucun téléphone cellulaire ne sont autorisés.

1. Trouver l'unique solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 4e^{3t}$$

satisfaisant aux conditions initiales $x(0) = 4$ et $\dfrac{dx}{dt}(0) = 9$.

2. On considère le système d'équations différentielles $\dfrac{d\vec{\mathbf{y}}}{dt} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}$ avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver l'unique solution $\vec{\mathbf{y}}(t)$ telle que $\vec{\mathbf{y}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Soit l'équation différentielle $xy'' + (1 - x)y' + 2y = 0$.
   (a) Trouver tous les points singuliers de cette équation et déterminer ceux qui sont réguliers.
   (b) Trouver une solution non triviale de cette équation dans un voisinage de zéro.

4. On considère la fonction $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   (a) Montrer qu'on a l'identité

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\cos(mx)}{\pi(m^2 - \frac{1}{4})} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

   Indice : L'identité $2\cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$ *pourrait être utile.*

   (b) Évaluer la somme $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1}$.

5. Une corde de longueur L, tendue et maintenue fixe en ses deux extrémités vibre dans l'air. Dû à la friction de l'air, un nouveau terme s'ajoute à l'équation de la corde vibrante qui devient :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \forall t,$$
où $\gamma > 0$ est une constante telle que $\gamma < \frac{2\pi\alpha}{L}$.
   (a) Trouver toutes les solutions de la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$ avec T de la forme $T(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$.
   (b) Quelle est la solution si initialement $u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$?
   (c) Quelle est la solution si on garde les mêmes conditions initiales, mais qu'on a plutôt que $\gamma > \frac{2\pi\alpha}{L}$?