MAT2190 : Calcul des équations différentielles ordinaires et partielles

Frédéric Rochon

20 septembre 2021

Résumé

Ce recueil contient les notes du cours «Calcul des équations différentielles ordinaires et partielles» (MAT2190) donné à l'Université du Québec à Montréal à l'hiver 2021.

Table des matières

1 Équations différentielles ordinaires d'ordre 1

1.1 Un peu de terminologie

Une **équation différentielle** est une équation impliquant une fonction et ses dérivées. C'est une **équation différentielle ordinaire** (EDO) si la fonction ne dépend que d'une seule variable.

Exemple 1.1. L'équation différentielle $f'(x) + 2f(x) = 2x$ est une équation différentielle ordinaire. L'équation du mouvement d'un pendule de longueur ℓ est aussi une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0,$$

où g est l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre.

On dit plutôt qu'une équation différentielle est une **équation aux dérivées partielles** (EDP) si la fonction dépend de plusieurs variables.

Exemple 1.2. Pour $\alpha > 0$ une constante positive, l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)$$

et l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(x,t) = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)$$

sont des exemples d'équations aux dérivées partielles.

On a un **système d'équations différentielles** s'il y a plusieurs équations différentielles impliquant plusieurs fonctions.

Exemple 1.3. Si x et y dénotent les populations de mouches et d'araignées d'une forêt, alors pour a, b, c et d des constantes strictement positives, le système proie-prédateur

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} & = & -cy + dxy \end{array}$$

est un système d'équations différentielles pouvant servir à modéliser l'évolution de ces populations.

L'**ordre** d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles est l'ordre de la dérivée la plus élevée. Par exemple, l'équation de la chaleur et l'équation des ondes sont des équations différentielles d'ordre 2, alors que le système proie-prédateur est un système d'équations différentielles d'ordre 1. On dit que l'équation différentielle ordinaire d'ordre n

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

est **linéaire** si F est une fonction linéaire en $y, y', \ldots, y^{(n)}$, c'est-à-dire que

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = h(t) + a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + a_n(t)y^{(n)}$$

pour des fonctions $h, a_0, a_1, \ldots, a_n$ de t. Autrement, on dit que l'équation est non-linéaire.

Exemple 1.4. L'équation du pendule

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

n'est pas linéaire. Cependant, en faisant l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ valide pour un angle θ petit mesuré en radians, on peut considérer à la place l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

Pour des angles assez petit, les solutions de cette équation décrivent assez bien les trajectoires du pendule et permettent entre autres d'estimer la période des oscillations comme on le verra plus tard.

1.2 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1

Un exemple simple d'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 est donné par une équation de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(t). \tag{1.1}$$

Dans ce cas, la solution générale est donnée par l'intégrale indéfinie de f,

$$y(t) = \int f(t)dt.$$

Autrement dit, en termes de l'intégrale définie de f, les solutions sont de la forme

$$y(t) = \int_0^t f(u)du + y_0$$

avec $y_0 = y(0)$.

Exemple 1.5. L'équation $\frac{dy}{dt} = \cos t$ a pour solution générale

$$y(t) = \int \cos(t)dt = \sin(t) + C$$

pour C une constante.

Exemple 1.6. L'équation $\frac{dy}{dt} = e^{-t^2}$ a pour solution générale

$$y(t) = \int e^{-t^2}dt.$$

Dans ce cas, la solution existe, mais elle ne peut pas être écrite en termes de fonctions connues standards.

Plus généralement, une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en est une de la forme

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{1.2}$$

Pour résoudre une telle équation, on peut se ramener au cas précédent en utilisant la méthode du facteur intégrant. Celle-ci consiste à considérer le facteur intégrant

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt},$$

de sorte que

$$\frac{d\mu}{dt} = p(t)e^{\int p(t)dt} = p(t)\mu(t).$$

Dans ce cas, on a que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mu y) &= \frac{d\mu}{dt}y + \mu\frac{dy}{dt} = \mu p(t)y + \mu\frac{dy}{dt} \\
&= \mu\left(p(t)y + \frac{dy}{dt}\right) = \mu\left(\frac{dy}{dt} + p(t)y\right) \\
&= \mu q(t), \quad \text{si } y \text{ est une solution de (1.2).}
\end{aligned}$$

Ainsi, en termes du facteur intégrant, l'équation (1.2) correspond à

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu q(t), \tag{1.3}$$

une équation précisément de la forme (1.1).

Exemple 1.7. Pour l'équation différentielle linéaire

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

avec a et b des constantes, on a que $p(t) = a$, donc

$$\int p(t)dt = at + C$$

pour C une constante. La constante C peut être choisie comme on veut, un choix différent correspondant à multiplier le facteur intégrant par une constante strictement positive, un changement pour lequel l'équation (1.3) reste valide. En prenant $C = 0$, cela donne le facteur intégrant $\mu(t) = e^{at}$. Il faut alors résoudre l'équation

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{at}y) = e^{at}b \quad &\Longrightarrow \quad e^{at}y = \int be^{at}dt = \frac{be^{at}}{a} + K, \quad \text{si } a \neq 0, \text{ où } K \in \mathbb{R}, \\
&\Longrightarrow \quad y = \frac{b}{a} + Ke^{-at} \quad (a \neq 0).
\end{aligned}$$

Si plutôt $a = 0$, l'équation devient

$$\frac{dy}{dt} = b \quad \Longrightarrow \quad y(t) = bt + K \quad \text{avec } K \text{ une constante.}$$

Exemple 1.8. On considère l'équation différentielle linéaire

$$t\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{\sin t}{t}.$$

En la mettant sous la forme plus familière

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2y}{t} = \frac{\sin t}{t^2},$$

cela suggère de prendre le facteur intégrant

$$\ln \mu = \int \frac{2}{t} dt = 2 \ln |t| + C = \ln(t^2) + C.$$

Autrement dit, en prenant $C = 0$, cela donne le facteur intégrant $\mu = t^2$. Dans ce cas,

$$y = \frac{1}{\mu} \int \mu q(t) dt = \frac{1}{t^2} \int t^2 \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{1}{t^2} \int \sin t dt = \frac{-\cos t + K}{t^2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Si en $t = \frac{\pi}{2}$, $y(\frac{\pi}{2}) = a$, alors pour $t > 0$, il faut que

$$a = \frac{-\cos(\frac{\pi}{2}) + K}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{0 + K}{\frac{\pi^2}{4}} \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{\pi^2 a}{4},$$

donc que

$$y(t) = \frac{-\cos t + \frac{\pi^2 a}{4}}{t^2} \quad \text{pour } t < 0.$$

Exemple 1.9. On considère l'équation

$$t\frac{dy}{dt} + (t+1)y = 2te^{-t} \quad \text{pour } t > 0$$

en demandant que $y(1) = a$. L'équation peut être mise sous la forme plus familière

$$\frac{dy}{dt} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) y = 2e^{-t},$$

de sorte que pour $t > 0$,

$$\int p(t) dt = \int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = t + \ln t + C$$

pour C une constante. En prenant $C = 0$, cela donne le facteur intégrant

$$\mu = e^{t + \ln t} = te^t,$$

ce qui nous donne comme solution générale

$$y = \frac{1}{\mu} \int \mu q(t) dt = \frac{1}{te^t} \int te^t \left(2e^{-t}\right) dt = \frac{1}{te^t} \int 2t dt = \frac{1}{te^t} \left(t^2 + K\right).$$

Pour que $y(1) = a$, il faut choisir la constante K comme suit :

$$\begin{aligned} y(1) = a \quad &\Longrightarrow \quad a = \frac{1}{e}(1 + K) \Longrightarrow K = ae - 1 \Longrightarrow y(t) = \frac{1}{te^t}\left(t^2 + ae - 1\right), \ t > 0 \\ &\Longrightarrow \quad y(t) = e^{-t}\left(t + \frac{ae - 1}{t}\right), \quad t > 0. \end{aligned}$$

1.3 Équations séparables

Une équation différentielle d'ordre 1

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

est **séparable** s'il est possible de «séparer» les variables x et y de chaque côté de l'équation.

Exemple 1.10. L'équation $\dfrac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$ peut être mise sous la forme

$$\frac{dy}{1 + y^2} = (1 + x^2)dx.$$

C'est donc une équation séparable.

Exemple 1.11. L'équation $\dfrac{dy}{dx} = \sin(xy)$ n'est pas séparable.

Lorsqu'une équation différentielle est séparable, on peut résoudre en séparant les variables et en intégrant de chaque côté.

Exemple 1.12. Pour l'équation différentielle séparable de l'Exemple 1.10, on a que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{1 + y^2} = (1 + x^2)dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int (1 + x^2)dx \\ &\Longrightarrow \quad \arctan y = x + \frac{x^3}{3} + C, \quad C \text{ une constante,} \\ &\Longrightarrow \quad y = \tan(x + \frac{x^3}{3} + C). \end{aligned}$$

On peut vérifier directement que c'est bien une solution,

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2\left(x + \frac{x^3}{3} + C\right)(1 + x^2) = (1 + y^2)(1 + x^2),$$

où dans la dernière égalité on a utilisé l'identité trigonométrique $1 + tan^2\theta = \sec^2\theta$.

Exemple 1.13. Pour $y \neq \pm 1$, l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \tag{1.4}$$

peut être mise sous la forme

$$(1 - y^2)dy = x^2 dx.$$

Elle est donc séparable. En intégrant de chaque côté, on obtient

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2 dx \quad \Longrightarrow \quad y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C \quad \Longrightarrow \quad y\left(1 - \frac{y^2}{3}\right) = \frac{x^3}{3} + C$$

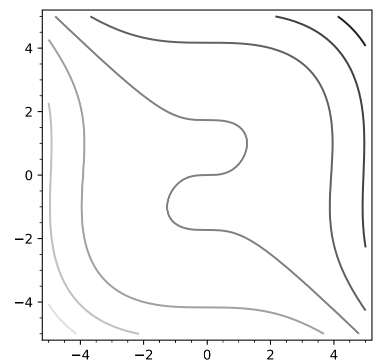


FIGURE 1 – Courbes de niveau de $h(x, y) = 3y - y^3 - x^3$

pour C une constante. Cela donne une solution implicite

$$3y - y^3 - x^3 = K$$

pour $K = 3C$ une constante. Pour chaque $K \in \mathbb{R}$, on obtient une courbe de niveau de la fonction $h(x, y) = 3y - y^3 - x^3$. Ces courbes ne sont pas nécessairement le graphe d'une fonction de x, mais localement elles le sont, sauf bien entendu aux points où la tangente est verticale. Dans le cas qui nous occupe, remarquons qu'il y a toujours un problème lorsque $y = \pm 1$, puisque justement la tangente à la courbe de niveau est alors verticale. Remarquons aussi que lorsque $|x| \gg 0$, on a approximativement $y \approx -x$.

Une solution de l'équation (1.4) pour $y \neq \pm 1$ est caractérisée par le fait que la quantité $3y - y^3 - x^3$ est préservée lorsque y varie en fonction de x, ce qu'on peut vérifier directement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(3y - y^3 - x^3) = 3\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} - 3x^2 &= 3\left(\frac{x^2}{1 - y^2}\right) - 3y^2\left(\frac{x^2}{1 - y^2}\right) - 3x^2 \\ &= 3(1 - y^2)\left(\frac{x^2}{1 - y^2}\right) - 3x^2 = 3x^2 - 3x^2 = 0. \end{aligned}$$

Exemple 1.14. L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xe^x}{y} \tag{1.5}$$

peut être mise sous la forme

$$ydy = -xe^x dx.$$

Elle est donc séparable. En intégrant de chaque côté, on obtient

$$\begin{aligned} \int ydy = -\int xe^x dx \quad &\Longrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\int xe^x dx = -\int udv, \quad \text{en posant } u = x, v = e^x, \\ &\Longrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -(uv - \int vdu) \quad \text{en intégrant par parties,} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -(xe^x - \int e^x dx) = -xe^x + e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ &\Longrightarrow y = \pm\sqrt{2(e^x(1 - x) + C)}. \end{aligned}$$

Définition 1.15. Une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 est **autonome** si elle est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

pour une fonction f ne dépendant que de y. C'est un cas particulier d'équation séparable, car elle peut être mise sous la forme

$$\frac{dy}{f(y)} = dx.$$

Exemple 1.16. Le solde $S(t)$ d'un compte bancaire dans lequel on verse des intérêts continûment à un taux $r > 0$ satisfait à l'équation

$$\frac{d}{dt}S(t) = rS(t). \tag{1.6}$$

C'est une équation autonome qui peut être résolue en séparant les variables :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = rdt \quad &\Longrightarrow \quad \int \frac{dS}{S} = \int rdt \quad \Longrightarrow \ln S = rt + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ &\Longrightarrow \quad S = e^C e^{rt} \\ &\Longrightarrow \quad S(t) = S_0 e^{rt} \quad \text{si } S_0 \text{ est le solde du compte au temps } t = 0. \end{aligned}$$

Comme l'équation (1.6) est aussi une équation différentielle linéaire, on peut utiliser un facteur intégrant pour la résoudre :

$$\begin{aligned} \mu t = e^{\int_0^1 p(u)du} = e^{-\int_0^t rdu} = e^{-rt} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mu S) = \frac{d}{dt}(e^{-rt}S) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad e^{-rt}S = \int 0dt = C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ &\Longrightarrow \quad S(t) = Ce^{rt} = S_0 e^{rt}, \end{aligned}$$

où à nouveau S_0 est le solde du compte au temps $t = 0$. L'équation (1.6) peut aussi servir à modéliser l'évolution d'une population animale lorsque la nourriture est en abondance et qu'il n'y a peu ou pas de prédateurs et de maladies. Dans ce cas, la constante r correspond au taux de croissance de la population. Lorsqu'on a plutôt $r < 0$, l'équation (1.6) permet de décrire le processus de désintégration de particules radioactives.

1.4 Le problème de la chaînette

Quelle est la forme d'une corde flexible de densité constante suspendue entre deux points ? En 1691, Leibniz, Jean Bernouilli et Huygens ont réussi presque simultanément à répondre à la question suite à un défi lancé par Jacques Bernouilli. Pour donner la réponse à cette question, soit $y = f(x)$ le graphe tracé par la corde, où y est la hauteur d'un élément de

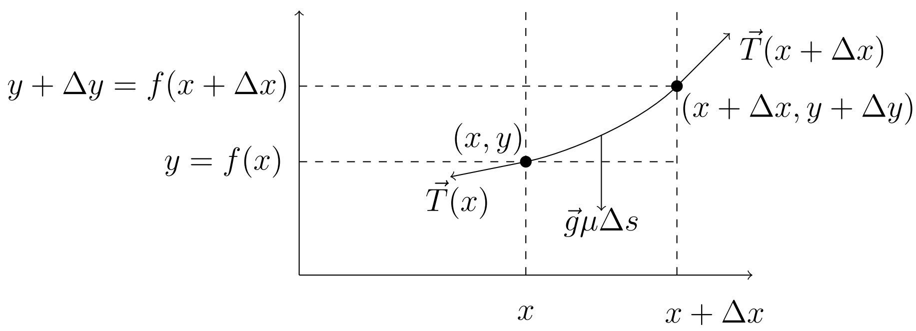


FIGURE 2 – Petit élément de corde de longueur Δs

corde. Soit μ la densité de masse de la corde et considérons un petit élément de corde de longueur Δs entre x et $x+\Delta x$.

Par le théorème de Pythagore, pour Δx petit, on a approximativement que

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}} \approx \Delta x \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Ainsi, la force gravitationnelle exercée sur cette élément est approximativement

$$g\mu\Delta s \approx g\mu\Delta x \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

et tire l'élément de corde vers le bas, où $g \approx 9,8 m/s^2$ est l'accélération due à l'attraction terreste. Les autres forces exercées sur l'élément de corde sont les tensions $\vec{T}(x)$ et $\vec{T}(x+\Delta x)$ aux deux extrémités de l'élément de corde. Comme on suppose que la corde est en équilibre, par la deuxième loi de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$), la somme des forces s'annulent. En particulier, les composantes horizontales de $\vec{T}(x)$ et $\vec{T}(x+\Delta x)$ s'annulent et sont de même intensité T_h. En variant l'une des extrémités de l'élément de corde, on voit aussi que T_h ne dépend pas de x, c'est-à-dire que la tension horizontale est la même partout dans la corde. Par rapport à T_h, la composante verticale de la tension est donc donnée par

$$T_v(x) = T_h f'(x).$$

Les composantes verticales dans les deux extrémités devant compenser le poids de l'élément de corde, il faut donc que

$$g\mu\Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2} \approx T_v(x+\Delta x) - T_v(x) = T_h(f'(x+\Delta x) - f'(x)),$$

c'est-à-dire que

$$\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \approx \frac{g\mu}{T_h}\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Cette approximation est d'autant meilleure que Δx est petit, de sorte qu'à la limite où $\Delta x \to 0$, on obtient la formule exacte

$$f''(x) = \frac{g\mu}{T_h}\sqrt{1 + f'(x)^2}. \tag{1.7}$$

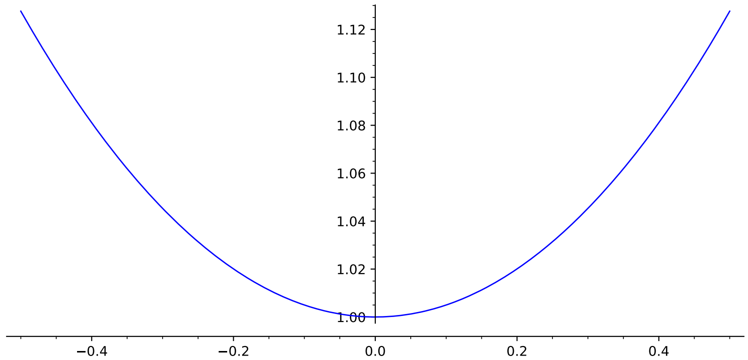


FIGURE 3 – Le graphe de la fonction $\cosh x$

Pour résoudre cette équation différentielle, introduisons la nouvelle fonction $u(x) := f'(x)$. L'équation (1.7) peut alors être mise sous la forme

$$\frac{du}{dx} = \frac{g\mu}{T_h}\sqrt{1+u^2}$$

d'une équation différentielle autonome. En séparant les variables, on obtient donc

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{g\mu}{T_h}\int dx \quad &\Longrightarrow \quad \operatorname{arcsinh} u = \frac{g\mu}{T_h}x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ &\Longrightarrow u = \sinh\left(\frac{g\mu}{T_h}x + C\right), \end{aligned}$$

où $\sinh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ est le sinus hyperbolique et arcsinh est son inverse en tant que fonction. Pour la fonction f, cela implique que

$$f'(x) = v \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \int \sinh\left(\frac{g\mu}{T_h}x + C\right)dx = \frac{T_h}{g\mu}\cosh\left(\frac{g\mu}{T_h}x + C\right) + K$$

pour une certaine consante K, où $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ est le cosinus hyperbolique. La forme de la corde suspendue est donc essentiellement le graphe d'un cosinus hyperbolique.

La forme de la chaînette peut être aussi utilisée pour décrire la forme optimale d'une arche auto-portante comme observé par Robert Hooke : «*De même que pend un fil flexible, de même, en inversant, on trouve les pièces contiguës d'une arche*». En effet, dans une arche auto-portante, on a des forces de compressions plutôt que des forces de tensions. En général, il y a aussi des forces de flexions. Ce sont ces dernières qui compromettent le plus la solidité d'une arche. La forme d'une arche sera donc optimale en termes de solidité si les forces de flexions sont nulles et que le matériau n'est soumis qu'à des forces de compression.

Or, la chaînette étant par hypothèse flexible, aucune force de flexion n'est exercée. Pour obtenir la forme optimale d'une arche, il suffit donc d'inverser la forme de la chaînette, de sorte que les forces en présence, à savoir le poids et la compression, pousserons toutes dans des directions opposées par rapport aux forces dans le problème de la chaînette, préservant ainsi l'équilibre et nous assurant qu'il n'y a pas de force de flexion. Autrement dit, si μ dénote cette fois la densité de masse de l'arche par unité de longueur et si $\vec{C}(x)$ et $\vec{C}(x+\Delta x)$ sont les forces de compression exercées aux deux extrémités d'un petit élément d'arche de longeur Δs entre x et $x+\Delta x$, alors le diagramme de la Figure 2 est remplacé par celui de la Figure 4.

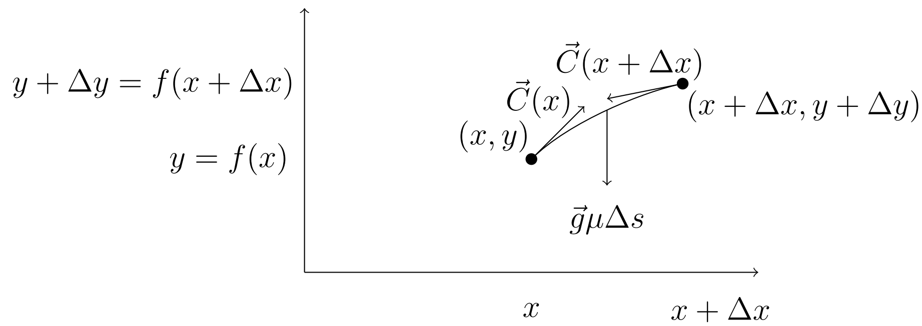


FIGURE 4 – Petit élément d'arche auto-portante Δs

Si maintenant la forme optimale de l'arche auto-portante correspond au graphe d'une fonction f, on aura cette fois que f satisfait à l'équation différentielle

$$f''(x) = -\frac{g\mu}{C_h}\sqrt{1+f'(x)^2} \tag{1.8}$$

où C_h correspond à la force de compression horizontale. En procédant comme ci-haut, la solution générale de cette équation est donc

$$f(x) = -\frac{C_h}{g\mu}\cosh\left(\frac{g\mu}{C_h}x + C\right) + K$$

pour C et K des constantes. À titre d'exemple, c'est une telle forme [1] qui est utilisée pour l'arche de Saint-Louis, la fameuse *Gateway Arch*.

1.5 Équations différentielles exactes

L'équation différentielle ordinaire

$$2x + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.9}$$

n'est ni linéaire, ni séparable. Pour la résoudre, on peut toutefois considérer la fonction

$$\psi(x,y) = x^2 + xy^2.$$

En effet, remarquons que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2x + y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2xy,$$

1. Plus précisément le graphe de la fonction $A\cosh(Bx)$ pour A et B des constantes différentes.

de sorte que l'équation différentielle (1.9) peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

En traitant y comme une fonction de x, on a en fait que

$$\frac{d}{dx}\psi(x, y(x)) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y(x))\frac{dy}{dx}.$$

L'équation (1.9) peut donc être mise sous la forme

$$\frac{d}{dx}(\psi(x, y(x))) = \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0.$$

En intégrant de chaque côté par rapport à x, cela donne

$$x^2 + xy^2 = C \quad \text{pour une constante } C,$$

c'est-à-dire que

$$y = \pm\sqrt{\frac{C - x^2}{x}}$$

en isolant y dans l'équation précédente.

Définition 1.17. Une équation différentielle ordinaire de la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

pour une certaine fonction ψ de x et y est dite **exacte**. Dans ce cas, les solutions sont données implicitement par

$$\psi(x, y) = C \quad \text{pour } C \text{ une constante}$$

et correspondent aux courbes de niveau de la fonction ψ.

Cette définition suscite deux questions naturelles. D'abord, comment peut-on déterminer si une équation différentielle de la forme

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

est exacte ? Ensuite, lorsqu'on sait qu'une telle équation différentielle est exacte, comment fait-on pour trouver une fonction ψ telle que l'équation prenne la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0?$$

Le théorème qui suit donne une réponse partielle à la première question, alors que sa démonstration donne une réponse partielle à la deuxième question.

Théorème 1.18. *Pour M et N des fonctions de classe C^1 (i.e. elles sont différentiables et leurs dérivées partielles à l'ordre 1 sont continues) dans une région rectangulaire*

$$[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2,$$

on a que l'équation différentielle

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

est exacte si et seulement si $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Démonstration. $\Longrightarrow$) Si l'équation est exacte, c'est-à-dire que $M = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ et $N = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ pour une certaine fonction ψ de classe C^2 (i.e. ses dérivées partielles existent et sont continues jusqu'à l'ordre 2), alors par un résultat du cours d'Analyse III (MAT3150), les dérivées partielles de ψ commutent, de sorte que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$\Longleftarrow$) On veut trouver une fonction ψ telle que $M = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ et $N = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$. Pour ce faire, considérons la fonction

$$\phi(x, y) := \int_a^x M(u, y)du.$$

Par le théorème fondamental du calcul, on a que $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = M(x, y)$. D'autre part, on calcule que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\int_a^x M(u, y)du \\
&= \int_0^x \frac{\partial M}{\partial y}(u, y)du, \quad \text{par un résultat d'Analyse II (MAT2150),} \\
&= \int_a^x \frac{\partial N}{\partial u}(u, y)du, \quad \text{par hypothèse,} \\
&= N(x, y) - N(a, y).
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\psi(x, y) = \phi(x, y) + \displaystyle\int_c^y N(a, v)dv$, car alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + N(a, y) = N(x, y).$$

□

Exemple 1.19. On considère l'équation différentielle $(6xy - y^3) + (4y + 3x^2 - 3xy^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$. Dans ce cas, $M(x, y) = 6xy - y^3$, $N(x, y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$ et on calcule que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Par le théorème précédent, l'équation est donc exacte. Reste à trouver une fonction ψ telle que
$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y) = 6xy - y^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} N(x,y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2.$$
En intégrant par rapport à x dans la première équation et en traitant y comme une constante, on a que
$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y) = 6xy - y^3 \quad \Longrightarrow \quad \psi = \int (6xy - y^3)dx = 3x^2y - xy^3 + \phi(y),$$
où ϕ est une fonction ne dépendant que de y. En reportant dans la deuxième équation, cela donne
$$\begin{aligned} 4y + 3x^2 - 3xy^2 = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 3x^2 - 3xy^2 + \frac{d\phi}{dy}(y) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{d\phi}{dy}(y) = 4 \\ &\Longrightarrow \quad \phi(y) = \int 4y dy = 2y^2 + C, \end{aligned}$$
pour C une constante. Ainsi, en prenant $C = 0$, on peut prendre
$$\psi(x,y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2,$$
de sorte que les équations sont données implicitement par $\psi(x,y) = K$ pour K une constante.

1.6 Facteurs intégrants

L'équation différentielle $(3xy+y^2)+(x^2+xy)\frac{dy}{dx} = 0$ n'est pas exacte par le Théorème 1.18, puisque
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \neq 2x + y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$
Cependant, il est possible dans ce cas de se ramener à une équation différentielle exacte en multipliant par un **facteur intégrant** $\mu(x,y)$:
$$\mu M(x,y) + \mu N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0.$$
Pour obtenir une équation exacte, il faut que
$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu N) = \frac{\partial\mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\mu M).$$
C'est une équation difficile à résoudre en général. Pour simplifier les calculs, on fera l'hypothèse que μ ne dépend que de x. Dans ce cas, il faut que
$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dx}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x} = \mu\frac{\partial M}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mu}{dx} &= \frac{\mu}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \mu\frac{(3x + 2y - 2x - y)}{x^2 + xy} \\ &= \frac{\mu(x+y)}{x(x+y)} = \frac{\mu}{x}. \end{aligned}$$

Comme il n'y a pas de dépendance en y, notre hypothèse sur le facteur intégrant μ est valable et on peut résoudre cette équation pour trouver μ,

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{dx}{x} \quad &\Longrightarrow \quad \ln|\mu| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \quad \mu = \pm Kx, \quad K = e^C > 0.\end{aligned}$$

On prendra la solution particulière $\mu = x$. Dans ce cas, notre équation différentielle devient

$$\begin{aligned}0 = x\left(M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx}\right) &= x\left(3xy + y^2 + (x^2+xy)\frac{dy}{dx}\right) \\ &= (3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)\frac{dy}{dx}.\end{aligned}$$

L'équation sous cette forme est bien exacte comme on peut le vérifier à l'aide du Théorème 1.18 :

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + xy^2) = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2y).$$

Pour la résoudre, il faut trouver une fonction ψ telle que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^3 + x^2y \quad \Longrightarrow \quad \psi(x,y) = \int (x^3 + x^2y)dy = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + \phi(x)$$

pour ϕ une fonction ne dépendant que de x. Il faut aussi que

$$3x^2y + xy^2 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 + \frac{d\phi}{dx} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) = C.$$

Prenons $C = 0$ de sorte que $\psi(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2}$. Les solutions de notre équation sont donc données implicitement par

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = K \quad \text{pour } K \in \mathbb{R}.$$

1.7 Exercices

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 + 3x + 2$;
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = x \sin x$;
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x} \ln x$ pour $x > 0$;
   (d) $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \sec^2 x$ pour $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
   (e) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - x^2}$ pour $x \in (-1, 1)$;

(f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2 - 2x - 3}$.

2. L'équation différentielle satisfaite par la vitesse $v(t)$, où t est le temps, d'une goutte d'eau en chute libre est donnée
$$\frac{dv}{dt} = g - kv \tag{1.10}$$
lorsque la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse.
   (a) Résoudre cette équation en utilisant la méthode des facteurs intégrants.
   (b) Montrer que peu importe la vitesse initiale, la vitesse de la goutte d'eau tend invariablement vers $\frac{g}{k}$ à mesure que le temps s'écoule.

3. L'équation différentielle
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$
est appelée équation de Bernoulli. Pour $n = 1$, c'est une équation linéaire.
   (a) Pour $n \neq 1$, montrer que le changement de variable $u = y^{1-n}$ ramène l'équation de Bernoulli à une équation linéaire.
   (b) Résoudre l'équation $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}y^2$.

4. Dans un petit village comptant 100 habitants, il y a $P(t)$ habitants ayant la grippe au temps t mesuré en jours. Supposons que le taux d'augmentation de $P(t)$ soit donné par l'équation différentielle
$$\frac{dP}{dt} = \frac{kP(100 - P)}{100}$$
où k est une certaine constante.
   (a) Est-ce que la constante k devrait être positive ou négative ?
   (b) Déterminer $P(t)$ si au temps $t = 0$, il n'y a qu'une seule personne infectée.
   (c) Lorsque t devient grand, est-ce que $P(t)$ s'approche d'une certaine valeur ? Si oui, quelle est cette valeur ?

5. On considère un pont suspendu ayant un tablier (parfaitement horizontal) de densité constante.
   (a) Déterminer la forme du câble porteur Pour ce faire, on peut supposer que le poids du câble porteur est négligeable par rapport à celui du tablier.
   (b) Si le tablier est toujours parfaitement horizontal et de densité constante, mais qu'on a plutôt un pont en arc (e.g. le Harbour bridge à Sydney en Australie), déterminer la forme de optimale de l'arc en utilisant le principe d'inversion de Hooke.

6. Vérifier que les équations différentielles suivantes sont exactes et trouver leur solution générale :

(a) $4x - y + (6y - x)\dfrac{dy}{dx} = 0$;

(b) $\dfrac{y}{x} + \ln x \dfrac{dy}{dx} = 0$ pour $x > 0$.

7. Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{x(x^2 + y^2)}{y} + (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

en la mettant d'abord sous une forme exacte à l'aide d'un facteur intégrant.

8. Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$-\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Montrer que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, mais que l'équation n'est pas exacte dans l'anneau

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

9. L'isotope radioactif du carbone ^{14}C a une demi-vie de 6000 ans. Cette isotope est présent dans les plantes et les animaux. Toutefois, lorsque qu'une plante ou un animal meurt, le carbone cesse d'être remplacé et la proportion m de carbone ^{14}C diminue selon un processus de décroissance radioactive modélisé par l'équation différentielle

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

où k est une constante positive. Si le squelette d'un castor géant de 2m de long (Ça a vraiment existé !) est retrouvé lors de fouilles achéologiques et qu'il ne contient que 25% de la quantité de ^{14}C normalement contenue dans les os d'un animal vivant, quand ce castor géant a-t-il perdu la vie ?

10. Georgette a contracté un prêt hypothécaire afin de s'acheter une maison. Si $H(t)$ est le montant à rembourser au temps t (mesuré en années), r est le taux d'intérêt annuel appliqué continûment et τ est le taux de remboursement annuel de Georgette réparti de façon continue au cours de l'année, alors $H(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dH}{dt} = rH - \tau. \tag{1.11}$$

(a) Si le montant emprunté initialement au temps $t = 0$ est H_0, déterminer $H(t)$ en résolvant l'équation (1.11).

(b) Déterminer le temps T qu'il faudra pour que Georgette ait complètement remboursé son prêt hypothécaire en termes de H_0, r et τ (Indice : T est tel que $H(T) = 0$). Si $H_0 = 400000\$$, $r = 5\% = 0,05$ et $\tau = 24000\$$/année, quel est la valeur de T ?

11. Supposons que la population d'une certaine espèce de poisson dans une certaine zone maritime, par exemple la morue dans le golf du Saint-Laurent, satisfait à l'équation différentielle
$$\frac{dy}{dt} = r(1 - \frac{y}{K})y - Ey,$$
où r, K et E sont des constantes strictement positives et t est mesuré en années. C'est le modèle de Schaefer, du nom du biologiste M.B. Schaefer qui l'a appliqué à l'étude des populations de poissons. Dans ce modèle, le terme Ey, qu'on suppose proportionnel à la population de poissons, correspond au nombre de Poissons péchés au cours d'une année.
   (a) Résoudre cette équation si $E \neq r$.
   (b) Si $E < r$, montrer que la population de poissons tend vers une certaine valeur strictement positive lorsque t est assez grand. Qu'arrive-t-il si on a plutôt $E > r$?

12. Résoudre l'équation différentielle
$$\frac{d^2y}{dt^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$
pour les conditions initiales $y(0) = 0$ et $\frac{dy}{dt}(0) = 0$. Pour ce faire, il pourrait être utile de d'abord résoudre l'équation différentielle correspondante pour la fonction $v(t) = \frac{dy}{dt}$.

13. Trouver la solution générale, possiblement sous forme implicite, de l'équation différentielle
$$(1 + x)e^{x+y} + (xe^{x+y} + 1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

2 Équations différentielles ordinaires d'ordre 2

Une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 est de la forme

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0.$$

Elle est linéaire si elle est de la forme $P(t)\dfrac{d^2y}{dt^2} + Q(t)\dfrac{dy}{dt} + R(t)y = G(t)$. D'habitude, on préfère la mettre sous la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = r(t) \quad \text{avec} \quad p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)},\ q(t) = \frac{R(t)}{P(t)},\ r(t) = \frac{G(t)}{P(t)}. \tag{2.1}$$

Définition 2.1. On dit que l'équation différentielle linéaire (2.1) est **homogène** si $r(t) = 0$. Autrement, on dit qu'elle est **non homogène**.

La situation la plus simple est lorsque $p(t)$ et $q(t)$ son des constantes et $r(t) = 0$. Dans ce cas, on a une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_0\frac{dy}{dt} + q_0y = 0 \quad \text{avec } p_0 \text{ et } q_0 \text{ des constantes.}$$

Comme pour les équations différentielles ordinaires d'ordre 1, on doit s'attendre à ce qu'une telle équation ait plusieurs solutions. Quelles seraient les conditions initiales qui permettraient de spécifier une seule solution parmi toutes les possibilités ? Si $y(t)$ correspond à la position d'une particule au temps t, alors $v = \frac{dy}{dt}$ est sa vitesse et $a = \frac{d^2y}{dt^2}$ est son accélération. Lorsqu'on connaît la position et la vitesse de la particule, l'équation différentielle nous donne son accélération. La connaissance de la position et de la vitesse de la particule semble donc suffisante pour déterminer une solution unique.

Exemple 2.2. Considérons l'équation $y'' - 3y' = 0$ ayant pour conditions initiales $y(0) = 0$ et $v(0) = 1$. Dans cette équation, y n'apparaît pas, ce qui suggère de considérer la fonction

$$v = \frac{dy}{dt}.$$

Par rapport à cette fonction, l'équation différentielle prend la forme

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} - 3v = 0 \quad &\implies \quad \frac{dv}{dt} = 3v \quad \implies \quad \frac{dv}{v} = 3dt \\
&\implies \quad \ln|v| = 3t + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&\implies |v| = Ke^{3t}, \quad K = e^C > 0, \\
&\implies v = Ke^{3t}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\dfrac{dy}{dt} = v = Ke^{3t}$, on obtient en intégrant par rapport à t que

$$y = \int Ke^{3t}dt = \frac{Ke^{3t}}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'équation est donc

$$y = C_1 e^{3t} + C_2 \quad \text{avec } C_1 = \tfrac{K}{3} \text{ et } C_2 = C \text{ des constantes.}$$

Maintenant, pour satisfaire la condition initiale concernant la vitesse, on doit avoir

$$v(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = v(0) = K \quad \Longrightarrow \quad K = 1.$$

Comme la position initiale est $y(0) = 0$, il faut donc que

$$0 = y(0) = \frac{e^{3(0)}}{3} + C \quad \Longrightarrow \quad 0 = \frac{1}{3} + C \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{3}.$$

Les conditions initiales $y(0) = 0$ et $v(0) = 1$ déterminent donc une unique solution

$$y(t) = \frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3}.$$

La méthode de l'exemple précédent fonctionne pourvu qu'il n'y ait pas un terme impliquant y. Que peut-on faire si «y» apparaît aussi dans l'équation ?

Exemple 2.3. Considérons l'équation linéaire homogène à coefficients constants

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0.$$

Ansatz [2] : On va chercher une solution de la forme $y(t) = e^{rt}$ pour une certaine constante r. Pour que $y(t) = e^{rt}$ soit une solution, il faut que

$$0 = \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = r^2 e^{rt} - 5re^{rt} + 6e^{rt} = (r^2 - 5r + 6)e^{rt}.$$

Puisque $e^{rt} > 0$ pour tout t, l'équation sera satisfaite si et seulement si

$$r^2 - 5r + 6 = 0. \tag{2.2}$$

Autrement dit, $y(t) = e^{rt}$ est une solution de l'équation si et seulement si r est une racine de **l'équation caractéristique** (2.2). Or, on calcule que

$$\begin{aligned} 0 = r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) \quad &\Longleftrightarrow \quad r = 2 \text{ ou } r = 3, \\ &\Longrightarrow \quad y = e^{2t} \text{ et } y = e^{3t} \text{ sont des solutions.} \end{aligned}$$

On verra dans un moment que la solution générale de cette équation différentielle est donnée par toutes les combinaisons linéaires de ces deux solutions :

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Mot d'origine allemande qu'on utilise en mathématiques au sens «d'hypothèse de départ» au sujet de la forme de la solution.

2.1 Le principe de superposition

Si on revient au cas plus général d'une équation différentielle linéaire homogène

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

remarquons que ses solutions correspondent au noyau de **l'opérateur différentiel linéaire** L défini par

$$L[\phi] = \phi'' + p(t)\phi' + q(t)\phi,$$

c'est-à-dire que l'équation différentielle peut être mise sous la forme

$$L[y] = 0. \tag{2.3}$$

Le théorème qui suit sera démontré dans le cours de Théorie des équations différentielles ordinaires (MAT3190).

Théorème 2.4 (Existence et unicité)**.** *Considérons l'équation différentielle ordinaire linéaire*

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t) \tag{2.4}$$

avec conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = v_0$. Si p, q et r sont des fonctions continues dans un intervalle ouvert I contenant t_0, alors l'équation (2.4) *possède une unique solution $y = \phi(t)$ dans l'intervalle ouvert I telle que $\phi(t_0) = y_0$ et $\phi'(t_0) = v_0$.*

Exemple 2.5. Soit l'équation

$$(\sin t)\frac{d^2y}{dt^2} + (\cos t)\frac{dy}{dt} + (t+1)y = e^t$$

avec conditions initiales $y(\frac{\pi}{2}) = 3$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 2$. Quel est le plus grand intervalle ouvert I contenant $\frac{\pi}{2}$ pour lequel le Théorème 2.4 nous garantit l'existence d'une unique solution ? D'abord, l'équation peut être mise sous la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\cot t)\frac{dy}{dt} + \frac{t+1}{\sin t}y = \frac{e^t}{\sin t}.$$

Sous cette forme, les coefficients sont continus sur l'intervalle $(0, \pi)$, mais pas en $t = 0$ et $t = \pi$. L'intervalle recherché est donc $I = (0, \pi)$.

Lorsque $r(t) = 0$, l'équation (2.4) est homogène et l'ensemble de ses solutions correspond au noyau de l'opérateur différentiel L. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de cette équation homogène et si $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, alors remarquons que

$$\begin{aligned}
L[c_1y_1 + c_2y_2] &= \frac{d^2}{dt^2}(c_1y_1 + c_2y_2) + p(t)\frac{d}{dt}(c_1y_1 + c_2y_2) + q(t)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1\frac{d^2}{dt^2}y_1 + c_2\frac{d^2}{dt^2}y_2 + c_1p\frac{dy_1}{dt} + c_2p\frac{dy_2}{dt} + c_1qy_1 + c_2qy_2 \\
&= c_1\left(\frac{d^2}{dt^2}y_1 + p\frac{dy_1}{dt} + qy_1\right) + c_2\left(\frac{d^2}{dt^2}y_2 + p\frac{dy_2}{dt} + qy_2\right) \\
&= c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = c_1(0) + c_2(0) = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

La combinaison linéaire $c_1y_1 + c_2y_2$ de y_1 et y_2 est donc elle aussi une solution de l'équation, ce qui démontre le résultat suivant.

Proposition 2.6 (Principe de superposition)**.** *Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire homogène* (2.3)*, alors leur combinaison linéaire $c_1y_1 + c_2y_2$ l'est aussi pour tous $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$.*

En fait, le calcul (2.5) montre que l'opérateur différentiel L est **linéaire** au sens où pour toutes fonctions ϕ_1 et ϕ_2 et pour toutes contantes c_1 et c_2,

$$L[c_1\phi_1 + c_2\phi_2] = c_1L[\phi_1] + c_2L[\phi_2].$$

Le principe de superposition peut être reformulé en disant que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (2.3) est un **espace vectoriel**. En particulier, on peut parler de la dimension de l'espace des solutions. Par le Théorème 2.4, pour une équation différentielle ordinaire linéaire homogène de degré 2, on s'attend à ce que l'espace des solutions soit de dimension 2, puisqu'une solution est complètement caractérisée par deux paramètres : la position et la vitesse initiales. Pour décrire cette espace de solutions, on aura besoin d'une **base**, c'est-à-dire d'une paire de solutions linéairement indépendantes dont les combinaisons linéaires engendrent tout l'espace.

Plus précisément, dans le cadre qui nous occupe, la notion d'indépendance linéaire introduite dans le cours d'algèbre linéaire I (MAT1250) prend la forme suivante : Deux fonctions y_1 et y_2 sont dites **linéairement indépendantes** si pour toutes constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$c_1y_1 + c_2y_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Autrement, on dit que y_1 et y_2 sont **linéairement dépendantes**, c'est-à-dire que l'une est un multiple de l'autre. De même, dire qu'un ensemble $\{y_1, y_2\}$ est une **base** de l'espace vectoriel V des solutions d'une équation différentielle signifie deux choses :

1. les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes ;
2. l'espace vectoriel V est engendré par les fonctions y_1 et y_2, c'est-à-dire que

$$V = \{c_1y_1 + c_2y_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 2.7. Les fonctions $f(t) = 1 + \cos(2t)$ et $g(t) = \cos^2(t)$ sont linéairement dépendantes sur tout intervalle, car l'identité trigonométrique

$$\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

montre que $f(t) - 2g(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est un multiple de g.

Pour déterminer si deux fonctions sont linéairement indépendantes, la notion suivante sera fort utile.

Définition 2.8. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Le **wronskien** de deux fonctions y_1 et y_2 sur I est donné par

$$W(y_1, y_2) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2.$$

Comme y_1 et y_2 sont des fonctions de t, le wronskien $W(y_1, y_2)$ dépend aussi de t.

Proposition 2.9. *Soient f et g deux fonctions différentiables sur un intervalle ouvert I. Si leur wronskien est tel que $W(t_0) \neq 0$ pour un certain $t_0 \in I$, alors les deux fonctions f et g sont linéairement indépendantes.*

Démonstration. Supposons que $c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$ pour tout $t \in I$ pour certaines constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que $c_1 = c_2 = 0$. En différentiant par rapport à t, on obtient

$$c_1 f'(t) + c_2 g'(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

En particulier, en $t = t_0$, cela donne

$$\begin{pmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0,$$

puisque la matrice

$$\begin{pmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{pmatrix}$$

est inversible, son déterminant

$$\det \begin{pmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{pmatrix} = W(t_0)$$

n'étant pas nul par hypothèse. □

Remarque 2.10. En particulier, si f et g sont des fonctions différentiables linéairement dépendantes sur un intervalle ouvert I, alors leur wronskien est identiquement nul.

Exemple 2.11. Les fonctions $f(t) = \cosh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ et $g(t) = \sinh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ sont linéairement indépendantes sur tout intervalle ouvert I. En effet, dans ce cas, leur wronskien est donné par

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \neq 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En ce qui concerne l'équation différentielle (2.3), le wronskien est une notion intéressante pour la raison suivante. Si y_1 et y_2 sont deux solutions à l'équation (2.3), alors

$$\begin{aligned} W(t_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix} \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &\qquad \text{possède une unique solution } \forall y_0, v_0 \in \mathbb{R}, \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = v_0 \end{matrix} \ \text{possède une unique} \\ &\qquad \text{solution } (c_1, c_2) \in \mathbb{R} \quad \forall y_0, v_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Théorème 2.12. *Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation différentielle $L[y] = 0$ telles que leur wronskien $W(t)$ ne s'annule pas en t_0. Si p et q sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I contenant t_0, alors l'unique solution $y(t)$ de l'équation ayant pour conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = v_0$ est de la forme*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

pour un choix unique de contantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Par la discussion ci-haut, il y a un choix unique de constantes c_1 et c_2 telles que

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= v_0. \end{aligned}$$

Par le principe de superposition, la combinaison linéaire $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ est donc la solution unique garantie par le Théorème 2.4. $\square$

Corollaire 2.13. *Dans l'intervalle ouvert I, toutes les solutions de l'équation $L[y] = 0$ sont de la forme $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ pour des constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Si $y(t)$ est une solution, alors par le Théorème 2.12, il existe d'uniques constantes c_1 et c_2 telles que la solution $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ satisfasse aux mêmes conditions initiales que $y(t)$ en t_0, à savoir

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= y'(t_0). \end{aligned}$$

Par unicité d'une telle solution, il faut donc que $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$. $\square$

Définition 2.14. Soit I un intervalle ouvert où les fonctions p et q sont continues. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation $L[y] = 0$ telles que leur wronskien $W(t)$ ne s'annule pas en un certain $t_0 \in I$, on dit que $\{y_1, y_2\}$ est un **ensemble fondamental** de solutions de l'équation $L[y] = 0$. Dans ce cas, la solution générale de cette équation est donnée par

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, $\{y_1, y_2\}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $L[y] = 0$ dans l'intervalle I.

Exemple 2.15. Pour l'équation $\dfrac{d^2y}{dt^2} + -5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$, on avait trouvé les solutions $y_1 = e^{2t}$ et $y_2 = e^{3t}$. Vérifions que $\{y_1, y_2\}$ est bien un ensemble fondamental de solution sur $I = \mathbb{R}$. En effet, leur wronskien est donné par

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} = e^{2t} 3e^{3t} - 2e^{2t} e^{3t} = (3-2)e^{5t} = e^{5t} \neq 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.16. *Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation différentielle*

$$L[y] = y'' + py' + qy = 0$$

pour p et q des fonctions continues sur un intervalle ouvert I, alors y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes sur I si et seulement si leur wronskien s'annule identiquement sur I.

Démonstration. $\Longrightarrow$) Cette implication est facile et découle de la Remarque 2.10.
$\Longleftarrow$) Supposons que $W(t) = 0$ pour tout $t \in I$ et choisissons $t_0 \in I$. Dans ce cas, le système

$$\begin{aligned} k_1 y_1(t_0) + k_2 y_2(t_0) = 0 \\ k_1 y_1'(t_0) + k_2 y_2'(t_0) = 0 \end{aligned}$$

possède une solution $(k_1, k_2) \neq (0,0)$. Maintenant, par le principe de superposition, la fonction $\phi(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$ est une solution de l'équation différentielle $L[y] = 0$ telle que $\phi(t_0) = \phi'(t_0) = 0$. Par l'unicité de la solution découlant du Théorème 2.4, la fonction $\phi(t) \equiv 0$ doit correspondre à la solution triviale, donc

$$k_1 y(t) + k_2 y_2(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

ce qui montre que y_1 et y_2 sont bien linéairement dépendantes sur l'intervalle I. □

En fait, lorsque deux solutions sont linéairement indépendantes, leur wronskien ne peut s'annuler comme le montre le théorème suivant, dû à Abel.

Théorème 2.17 (Abel)**.** *Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation $L[y] = y'' + py' + qy = 0$ sur un intervalle ouvert I où p et q sont des fonctions continues, alors le wronskien de y_1 et y_2 est donné par*

$$W(y_1, y_2) = Ce^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}$$

où $t_0 \in I$ est fixé et C est une constante ne dépendant que de t_0, y_1 et y_2. En particulier, soit $W(t)$ s'annule partout sur I, soit il ne s'annule nulle part.

Démonstration. L'idée est de calculer la première dérivée du wronskien $W(t) = y_1 y_2' - y_1' y_2$:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt}(y_1 y_2' - y_1' y_2) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \\ &= y_1(-py_2' - qy_2) - (-py_1' - qy_1)y_2, \quad \text{car } y_1 \text{ et } y_2 \text{ sont des solutions de } L[y] = 0, \\ &= -p(y_1 y_2' - y_1' y_2) - q(y_1 y_2 - y_1 y_2) = -p(y_1 y_2' - y_1' y_2) = -pW. \end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\frac{dW}{dt} + p(t)W = 0 \quad \Longrightarrow \quad W(t) = Ce^{F(t)}$$

avec C une constante et F une primitive de $-p(t)$. Pour $t_0 \in I$ fixé, on peut en particulier prendre

$$F(t) = -\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau.$$

□

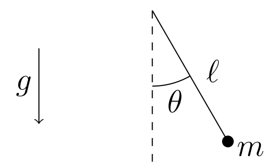


Figure 5 – Dessin schématique du pendule

2.2 Racines complexes de l'équation caractéristique

L'équation du mouvement d'un pendule de longueur ℓ et de masse m est donnée par

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \tag{2.6}$$

où $g \approx 9,8m/s^2$ est l'accélération gravitationnelle due à l'attraction terrestre et θ est l'angle que forme le pendule avec l'axe vertical. C'est une équation non linéaire, mais en faisant l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \theta$ pour θ petit mesuré en radians, on peut la remplacer par l'équation linéaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \tag{2.7}$$

plus facile à résoudre. Quelles sont les solutions de cette équation linéarisée ?
Ansatz : Recherchons une solution de la forme $\theta(t) = e^{rt}$. Dans ce cas,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = r^2 e^{rt},$$

alors on aura une solution pourvu que

$$0 = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = r^2e^{rt} + \frac{g}{\ell}e^{rt} = \left(r^2 + \frac{g}{\ell}\right)e^{rt} \quad \Longrightarrow \quad r^2 + \frac{g}{\ell} = 0.$$

Ce polynôme ne possède aucune racine réelle, seulement des racines imaginaires, puisque

$$r^2 = -\frac{g}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad r = \pm\sqrt{-\frac{g}{\ell}} = \pm i\sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

où $i = \sqrt{-1}$. En faisant «mine de rien» et en posant $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, on obtient au moins formellement deux solutions :

$$e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad e^{-i\omega t}.$$

Évidemment, comme ces fonctions prennent des valeurs complexes, elles ne peuvent en aucun cas décrire la trajectoire d'un pendule. Cependant, certaines de leurs combinaisons linéaires peuvent elles donner lieu à des solutions à valeurs réelles. Pour le voir, on peut utiliser la formule d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{2.8}$$

Rappelons que cette formule peut se démontrer à l'aide de la série de Taylor $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k$ de la fonction exponentielle $f(t) = e^t$ donnée par

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En effet, lorsque t est remplacé par it, on a plus généralement que

$$\begin{aligned}
e^{it} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{car } i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos t + i \sin t,
\end{aligned}$$

puisque les séries de puissances à la dernière ligne correspondent aux séries de Taylor des fonctions cosinus et sinus. En termes de la formule d'Euler, les deux solutions formelles qu'on a trouvées sont donc données par

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \quad \text{et} \quad e^{-i\omega t} = \cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t),$$

car $\cos\theta = \cos(-\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. De ce point de vue, on obtient deux solutions à valeurs réelles en considérant les combinaisons linéaires

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

En se rappelant que $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, vérifions directement que ce sont bien des solutions :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega t) &= \frac{d}{dt}(-\omega\sin(\omega t)) = -\omega^2\cos(\omega t) &&\Longrightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega t) + \frac{g}{\ell}\cos(\omega t) = 0, \\
\frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega t) &= \frac{d}{dt}(\omega\cos(\omega t)) = -\omega^2\sin(\omega t) &&\Longrightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega t) + \frac{g}{\ell}\sin(\omega t) = 0.
\end{aligned}$$

Pour déterminer si ces deux solutions constituent un ensemble fondamental de solutions, on peut calculer leur wronskien :

$$\begin{aligned}
W(t) &= \det\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ \frac{d}{dt}\cos(\omega t) & \frac{d}{dt}\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} \\
&= \omega^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) \\
&= \omega^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Comme le wronskien n'est pas nul, $\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$ est bien un ensemble fondamental de solutions. La solution générale de l'équation est donc donnée par

$$\theta(t) = k_1\cos(\omega t) + k_2\sin(\omega t), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

En particulier, les solutions sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$. Ainsi, pour de petites oscillations, la période des oscillations est complètement déterminée par la longueur du pendule. Par exemple, si le pendule correspond à une balançoire de longueur $\ell = 3m$ dans un parc, alors la période d'une (petite) oscillation est d'environ

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{3m}{9,8m/s^2}} \approx 3,48s.$$

En général toutefois, un pendule n'oscille pas indéfiniment. La résistance de l'air le freine peu à peu. Si cette dernière est proportionnelle à la vitesse du pendule, l'équation linéarisée qu'on obtient, toujours en faisant l'approximation des petits angles, est de la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \tag{2.9}$$

avec $\gamma > 0$ mesuré en s^{-1}. Le terme du milieu dans cette équation correspond à l'effet de la résistance de l'air. À nouveau, pour trouver une solution à cette équation, faisons le même ansatz et cherchons une solution de la forme e^{rt} pour une constante r à déterminer. L'équation caractéristique qu'on obtient est alors

$$r^2 + \gamma r + \omega^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

Si $\gamma^2 < 4\omega^2$, on obtient deux racines complexes,

$$r = \frac{-\gamma \pm i\mu}{2}, \quad \mu = \sqrt{4\omega^2 - a^2},$$

donnant lieu formellement à deux solutions

$$y_1 = e^{(-\frac{\gamma}{2}+i\frac{\mu}{2})t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{\frac{i\mu t}{2}} \quad \text{et} \quad y_2 = e^{(-\frac{\gamma}{2}-i\frac{\mu}{2})t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-\frac{i\mu t}{2}}.$$

Ces solutions sont à valeurs complexes, mais on obtient des solutions à valeurs réelles en considérant des combinaisons linéaires appropriées :

$$\theta_1 = \mathrm{Re}(y_1) = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\left(\frac{\mu}{2}t\right), \quad \theta_2 = \mathrm{Im}(y_1) = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin\left(\frac{\mu}{2}t\right).$$

Le wronskien de ces solutions est donné par

$$\begin{aligned}
W(t) &= \det\begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_1' & \theta_2' \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\frac{\mu}{2}t) & e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin(\frac{\mu}{2}t) \\ e^{-\frac{\gamma}{2}t}(-\frac{\gamma}{2}\cos(\frac{\mu}{2}t) - \frac{\mu}{2}\sin(\frac{\mu}{2}t)) & e^{-\frac{\gamma}{2}t}(-\frac{\gamma}{2}\sin(\frac{\mu}{2}t) + \frac{\mu}{2}\cos(\frac{\mu}{2}t)) \end{pmatrix} \\
&= e^{-\gamma t}\left(-\frac{\gamma}{2}\cos(\frac{\mu}{2}t)\sin(\frac{\mu}{2}t) + \frac{\mu}{2}\cos^2(\frac{\mu}{2}t) + \frac{\gamma}{2}\sin(\frac{\mu}{2}t)\cos(\frac{\mu}{2}t) + \frac{\mu}{2}\sin^2(\frac{\mu}{2}t)\right) \\
&= e^{-\gamma t}\left(\cos^2(\frac{\mu}{2}t) + \sin^2(\frac{\mu}{2}t)\right) = \frac{\mu}{2}e^{-\gamma t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Par le Théorème 2.12, la solution générale est donc donnée par

$$\theta(t) = k_1\theta_1(t) + k_2\theta_2(t), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Exemple 2.18. L'équation différentielle $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+2y=0$ a pour équation caractéristique

$$r^2+2r+2=0 \quad\Longrightarrow\quad r=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(2)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=-1\pm i,$$

de sorte que la solution générale est donnée par

$$y(t)=k_1e^{-t}\cos(t)+k_2e^{-t}\sin(t),\quad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

Les solutions données par (2.10) oscillent malgré l'effet de la résistance de l'air, mais l'amplitude de leurs oscillations s'amenuise au fil de temps. De plus, la période des oscillations est donnée par

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\mu}{2}}=\frac{4\pi}{\sqrt{4\omega^2-\gamma^2}}>\frac{2\pi}{\omega},$$

une période plus longue que dans le cas où il n'y a pas de résistance de l'air. En fait, à la limite $\gamma\nearrow 2\omega$, cette période tend vers l'infini, ce qui est en accord avec le fait que pour $\gamma^2>4\omega^2$, notre ansatz donne deux solutions décroissant exponentiellement rapidement,

$$\theta_1=e^{r_1t}\quad\text{et}\quad\theta_2=e^{r_2t}\quad\text{avec}\qquad r_1=\frac{-\gamma-\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}}{2}<r_2=\frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}}{2}<0.$$

Le wronskien dans ce cas est donné par

$$W(t)=\det\begin{pmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t}\\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t}\end{pmatrix}=e^{(r_1+r_2)t}(r_2-r_1)\neq 0,$$

ce qui montre que la solution générale est donnée par

$$\theta(t)=k_1e^{r_1t}+k_2e^{r_2t},\quad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

Dans le cas limite où on a exactement $\gamma^2=4\omega^2$, l'équation caractéristique n'a qu'une racine, ce qui ne donne qu'une solution. Il faut donc trouver une autre solution linéairement indépendante pour pouvoir engendrer l'espace des solutions.

2.3 Racines doubles et réduction de l'ordre

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0. \tag{2.11}$$

En cherchant une solution de la forme $y=e^{rt}$, on trouve l'équation caractéristique

$$\begin{aligned} r^2+2r+1=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad (r+1)^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad r=-1 \text{ est une racine double,}\\ &\Longrightarrow\quad y_1(t)=e^{-t}\quad\text{est une solution.}\end{aligned}$$

Pour obtenir la solution générale, il faut trouver une autre solution. Pour ce faire, suivant une approche due à d'Alembert, nous allons rechercher une solution de la forme

$$y_2(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-t}$$

avec $v(t)$ une fonction à déterminer. On calcule que

$$y_2' = v'y_1 + vy_1' \quad \text{et} \quad y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''.$$

Ainsi, pour que y_2 soit une solution, il faut que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2y_2}{dt^2} + 2\frac{dy_2}{dt} + y_2 = (v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + 2(v'y_1 + vy_1') + vy \\
&= v''y_1 + v'(2y_1' + 2y_1) + v(y_1'' + 2y_1' + y_1) \\
&= v''y_1 + v'(2y_1' + 2y_1) + 0, \quad \text{car } y_1 \text{ est une solution} \\
&= v''e^{-t} + v'(-2e^{-t} + 2e^{-t}) = v''e^{-t}.
\end{aligned}$$

Il faut donc que

$$v'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad v' = c_1 \quad \Longrightarrow \quad v = c_1t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En particulier, en prenant $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$, on obtient une deuxième solution $y_2(t) = te^{-t}$. Vérifions que $\{y_1, y_2\}$ est bien un ensemble fondamental de solutions. En effet, le wronskien correspondant est donné par

$$\begin{aligned}
W(t) &= \det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t}(1-t) \end{pmatrix} \\
&= e^{-t}e^{-t}(1-t) - te^{-t}(-e^{-t}) = e^{-2t}(1-t+t) = e^{-2t} \neq 0,
\end{aligned}$$

donc $\{y_1, y_2\}$ est bien un ensemble fondamental de solutions par le Théorème 2.12. La solution générale de l'équation est donc donnée par

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.19. Plus généralement, si l'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire ordinaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + p_0y' + q_0y = 0, \quad p_0, q_0 \in \mathbb{R}$$

ne possède qu'une racine double r_1, on peut montrer en utilisant l'ansatz de d'Alembert que la solution générale de l'équation est de la forme

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2te^{r_1t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

L'approche de d'Alembert sert aussi dans des cadres où les coefficients ne sont pas constants. À titre d'exemple, considérons l'équation différentielle

$$(t-1)y'' - ty' + y = 0 \quad \text{pour } t > 1. \tag{2.12}$$

On vérifie aisément que $y_1(t) = e^t$ est une solution de cette équation. La méthode de d'Alembert va nous permettre de trouver une autre solution en posant

$$y_2(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^t \quad \Longrightarrow \quad y_2' = e^t v + e^t v' \quad \text{et} \quad y_2'' = e^t v + 2e^t v' + e^t v'',$$

où $v(t)$ est une fonction à déterminer. Pour que y_2 soit une solution, il faut que

$$\begin{aligned} 0 &= (t-1)y_2'' - ty_2' + y_2 = (t-1)e^t(v + 2v' + v'') - te^t(v + v') + e^t v \\ &= e^t \left(v''(t-1) + v'(2(t-1) - t) + v(t - 1 - t + 1)\right) \\ &= e^t \left((t-1)v'' + (t-2)v'\right). \end{aligned}$$

Il faut donc que

$$\begin{aligned} (t-1)v'' + (t-2)v' = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (1-t)u' + (t-2)u = 0 \quad \text{en posant } u = v', \\ &\Longrightarrow \frac{u'}{u} = \frac{2-t}{t-1} \quad \Longrightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{2-t}{t-1}dt, \\ &\Longrightarrow \ln|u| = \int \frac{2-t}{t-1}dt = \int \frac{1-t+1}{t-1}dt = -\int dt + \int \frac{dt}{t-1} \\ &\Longrightarrow \quad \ln|u| = -t + \ln|t-1| + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ &\Longrightarrow \quad u = Ke^{-t}(t-1), \quad K \in \mathbb{R}, \\ &\Longrightarrow \quad v = K\int e^{-t}(t-1)dt = Ke^{-t}t + C. \end{aligned}$$

Ainsi, on a que $y_2(t) = v(t)e^t = Kt + Ce^t$. En prenant $K = 1$ et $C = 0$, cela donne la nouvelle solution $y_2(t) = t$. Pour ce choix, $\{y_1, y_2\}$ est bien un ensemble fondamental de solutions, puisque

$$W(y_1, y_2)) = \det\begin{pmatrix} e^t & t \\ e^t & 1 \end{pmatrix} = e^t - te^t = e^t(1-t) \neq 0 \quad \text{pour } t > 1.$$

2.4 Équations non homogènes : méthodes des coefficients indéterminés

Considérons l'équation différentielle linéaire non homogène

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t), \tag{2.13}$$

où p, q et r sont des fonctions continues dans un intervalle ouvert I. Sur I, on sait alors que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $L[y] = 0$ forme un espace vectoriel de dimension 2. De même, par le théorème d'existence et d'unicité, on sait que l'ensemble des solutions de l'équation non homogène (2.13) est aussi de dimension 2. Ce n'est toutefois pas un espace vectoriel. En effet, si Y_1 et Y_2 sont deux solutions, alors la combinaison linéaire $c_1Y_1 + c_2Y_2$ n'est typiquement pas une solution, car

$$L[c_1Y_1 + c_2Y_2] = c_1L[Y_1] + c_2L[Y_2] = c_1r(t) + c_2r(t) = (c_1 + c_2)r(t),$$

ce qui n'est pas égal à $r(t)$ si $c_1 + c_2 \neq 1$ et $r(t) \neq 0$. Malgré tout, l'ensemble des solutions n'est pas loin d'être un espace vectoriel.

Lemme 2.20. *Si Y_1 et Y_2 sont deux solutions de l'équation* (2.13) *dans l'intervalle I, alors leur différence $Y_1 - Y_2$ est une solution de l'équation homogène :*

$$L[Y_1 - Y_2] = 0.$$

Démonstration.

$$L[Y_1 - Y_2] = L[Y_1] - L[Y_2] = r(t) - r(t) = 0.$$

□

Théorème 2.21. *La solution générale de l'équation non homogène* (2.13) *dans l'intervalle ouvert I est donnée par*

$$y(t) = k_1y_1(t) + k_2y_2(t) + Y(t), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

où $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène $L[y] = 0$ et $Y(t)$ est une solution particulière de l'équation non homogène (2.13)*.*

Démonstration. Lorsqu'une solution particulière $Y(t)$ est donnée, toute autre solution $Y_1(t)$ est telle que

$$Y_1(t) = (Y_1(t) - Y(t)) + Y(t) = k_1y_1(t) + k_2y_2(t) + Y(t) \quad \text{pour certains } k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

car par le lemme $Y_1 - Y$ est une solution de l'équation homogène. D'autre part, pour tous $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1y_1(t) + k_2y_2(t) + Y(t)$ est une solution, puisque

$$L[k_1y_1 + k_2y_2 + Y] = k_1L[y_1] + k_2L[y_2] + L[Y] = k_1(0) + k_2(0) + r(t) = r(t).$$

□

Remarque 2.22. En termes du cours MAT2400 (Géométries), le Théorème 2.21 montre que l'ensemble des solutions de l'équation non homogène (2.13) n'est pas un espace vectoriel, mais à tout le moins un espace affine de dimension 2.

Ainsi, pour trouver la solution générale de l'équation (2.13), il suffit de trouver une solution particulière de l'équation et la solution générale de l'équation homogène $L[y] = 0$.

Exemple 2.23. On considère l'équation $y'' - 7y' + 10y = e^t$. Recherchons d'abord une solution de la forme $Y(t) = Ae^t$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$. Il faut alors que

$$A(1 - 7 + 10)e^t = e^t \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{4}.$$

De plus, l'équation caractéristique de l'équation homogène est

$$r^2 - 7r + 10 = (r-2)(r-5) = 0,$$

donc $y_1(t) = e^{2t}$ et $y_2(t) = e^{5t}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène. Ainsi, la solution générale de l'équation non homogène est

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t} + \frac{e^t}{4}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.24. Considérons l'équation non homogène $y'' - 7y' + 10y = e^{2t}$. Cette fois, l'ansatz $Y(t) = Ae^{2t}$ ne fonctionne pas, puisque c'est une solution de l'équation homogène. En s'inspirant de la Remarque 2.19, cherchons plutôt une solution de la forme $Y(t) = Ate^{2t}$, de sorte que

$$Y'(t) = Ae^{2t}(1+2t) \quad \text{et} \quad Y''(t) = Ae^{2t}(2 + 2(1+2t)) = 4Ae^{2t}(1+t).$$

Pour que ce soit une solution, il faut que

$$\begin{aligned} e^{2t} = Y'' - 7Y' + 10Y &= 4Ae^{2t}(1+t) - 7Ae^{2t}(1+2t) + 10Ate^{2t} \\ &= Ae^{2t}((4-7) + t(4 - 14 + 10)) = -3Ae^{2t}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $A = -\frac{1}{3}$. Ainsi, $Y(t) = -\dfrac{te^{2t}}{3}$ est une solution particulière, de sorte que la solution générale est donnée par

$$c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t} - \frac{te^{2t}}{3}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.25. Considérons maintenant l'équation non homogène $y'' - 7y' + 10y = \cos t$ et cherchons une solution de la forme

$$Y(t) = A\cos t + B\sin t \quad \Longrightarrow \quad Y'(t) = -A\sin t + B\cos t \quad \text{et} \quad Y''(t) = -A\cos t - B\sin t.$$

Pour que ce soit une solution, il faut donc que

$$\begin{aligned} \cos t = Y'' - 7Y' + 10Y &= -A\cos t - B\sin t - 7(-A\sin t + B\cos t) + 10(A\cos t + B\sin t) \\ &= (-A - 7B + 10A)\cos t + (-B + 7A + 10B)\sin t \\ &= (9A - 7B)\cos t + (9B + 7A)\sin t, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{array}{rcl} 9A - 7B & = & 1 \\ 9B + 7A & = & 0 \end{array} \implies \begin{array}{rcl} B & = & -\frac{7A}{9} \\ 9A + \frac{49A}{9} & = & 1 \end{array} \implies \begin{array}{rcl} B & = & -\frac{7A}{9} \\ 130A & = & 9 \end{array}$$

$$\implies \begin{array}{rcl} B & = & -\frac{7A}{9} = -\frac{7}{130} \\ A & = & \frac{9}{130}. \end{array}$$

Ainsi, $Y(t) = \dfrac{9\cos t}{130} - \dfrac{7\sin t}{130}$ est une solution particulière et la solution générale est donnée par

$$c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t} + \frac{9\cos t}{130} - \frac{7\sin t}{130}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.26. Enfin, considérons l'équation non homogène $y'' - 7y' + 10y = t + e^{2t}$. Pour obtenir sa solution générale, il suffit de trouver une solution particulière $Y(t)$ à l'équation

$$y'' - 7y' + 10y = t$$

et de l'ajouter à la solution générale de l'Exemple 2.24. Essayons de trouver une telle solution particulière de la forme $Y(t) = At + B$, de sorte que $Y'(t) = A$ et $Y''(t) = 0$. On veut choisir les constantes A et B pour que

$$t = Y'' - 7Y' + 10Y = 0 - 7A + 10(At + B) = 10At + (10B - 7A).$$

Il faut donc que

$$\begin{array}{rcl} 10A & = & 1 \\ 10B - 7A & = & 0 \end{array} \implies \begin{array}{rcl} A & = & \frac{1}{10} \\ B & = & \frac{7A}{10} = \frac{7}{100} \end{array} \implies Y(t) = \frac{t}{10} + \frac{7}{100}.$$

On en déduit que la solution générale de l'équation initiale est

$$k_1 e^{2t} + k_2 e^{5t} - \frac{te^{2t}}{3} + \frac{t}{10} + \frac{7}{100}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

La méthode que nous avons utilisée dans tous ces exemples est celle des coefficients indéterminés. Pour résoudre une équation non homogène de la forme

$$y'' + p_0 y' + q_0 y = r(t), \quad p_0, q_0 \in \mathbb{R},$$

on peut résumer cette méthode par le tableau suivant :

$r(t)$	Ansatz pour la solution particulière
$P_n(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$	$t^s(A_n + A_{n-1}t^{n-1} + \cdots + A_0)$ (d'habitude $s = 0$)
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_n t^n + \cdots + A_0)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$	$t^s e^{\alpha t}[(A_n t^n \cdots + A_0)\cos\beta t + (B_n t^n + \cdots + B + 0)\sin\beta t]$
$P_n(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$	$t^s e^{\alpha t}[(A_n t^n \cdots + A_0)\cos\beta t + (B_n t^n + \cdots + B + 0)\sin\beta t]$.

La puissance $s \in \{0, 1, 2\}$ est la plus petite puissance telle que l'ansatz $Y(t)$ n'est pas une solution de l'équation homogène

$$y'' + p_0 y' + q_0 y = 0.$$

2.5 Méthode de variation des paramètres et réduction de l'ordre

La méthode des coefficients indéterminés ne fonctionne que lorsque les dérivées de $r(t)$ sont de la même forme que $r(t)$, par exemple lorsque $r(t) = P(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ avec $P(t)$ un polynôme. De plus, il faut que l'équation différentielle ordinaire linéaire soit à coefficients constants. Plus généralement, on peut utiliser les solutions d'une équation homogène

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2.14}$$

sur un intervalle ouvert I où p et q sont des fonctions continues pour obtenir une solution à l'équation non homogène

$$y'' + py' + qy = r \tag{2.15}$$

avec r une fonction continue sur I. En effet, soit $\{y_1, y_2\}$ un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène (2.14) sur I. Pour trouver une solution à l'équation non homogène (2.15), l'idée de la méthode de variation des paramètres consiste à rechercher une solution particulière de la forme

$$Y(t) := u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

avec $u_1(t)$ et $u_2(t)$ des fonctions à déterminer. La dérivée de $Y(t)$ est alors donnée par

$$Y'(t) = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'.$$

Comme nous avons deux fonctions inconnues u_1 et u_2, mais qu'au final seule la fonction $Y(t)$ nous intéresse, on peut au besoin imposer des conditions supplémentaires. Une condition qui simplifiera beaucoup les calculs est la suivante :

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \tag{2.16}$$

Dans ce cas,

$$Y'(t) = u_1y_1' + u_2y_2' \quad \Longrightarrow \quad Y''(t) = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''.$$

En utilisant le fait que y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation homogène, on souhaite donc que

$$\begin{aligned} r(t) = Y'' + pY' + qY &= \sum_{j=1}^{2} \left(u_j'y_j' + u_jy_j'' + p(u_jy_j') + q(u_jy_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{2} \left(u_j'y_j' + u_j(y_j'' + py_j' + qy_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{2} u_j'y_j', \quad \text{car } y_j \text{ est une solution de (2.14),} \\ &= u_1'y_1' + u_2'y_2'. \end{aligned}$$

On a donc les deux équations suivantes pour les dérivées de u_1 et u_2 :

$$\left.\begin{array}{l} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = r(t) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(t) \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Or, par le théorème d'Abel et le fait que $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions, la matrice apparaissant dans cette équation est inversible avec inverse donné par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{cof}(A)^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Ainsi, on a que

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ r(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} -y_2(t)r(t) \\ y_1 r(t) \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{y_2 r(t)}{W(y_1, y_2)} \quad \Longrightarrow \quad u_1 = -\int \frac{y_2(t)r(t)}{W(y_1, y_2)} dt, \\ u_2' &= \frac{y_1 r(t)}{W(y_1, y_2)} \quad \Longrightarrow \quad u_2 = \int \frac{y_1(t)r(t)}{W(y_1, y_2)} dt. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ce calcul établit le résultat suivant.

Théorème 2.27. *Si $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène* (2.14)*, alors pour un choix de $t_0 \in I$, la fonction*

$$Y(t) = -y_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{y_2(\tau)r(\tau)}{W(y_1, y_2)(\tau)} d\tau + y_2(t) \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(\tau)r(\tau)}{W(y_1, y_2)(\tau)} d\tau$$

est une solution particulière de l'équation non homogène (2.15)*. Sa solution générale est donc de la forme*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.28. Considérons l'équation non homogène

$$(1-t)y'' + ty' - y = \frac{(1-t)^2}{t}, \quad t > 1.$$

En divisant par $(1-t)$, celle-ci peut être mise sous la forme

$$y'' + p(t)y' + q(t) = r(t), \quad t > 1 \quad \text{avec} \quad p(t) = \frac{t}{1-t},\ q(t) = \frac{-1}{1-t} \text{ et } r(t) = \frac{1-t}{t}.$$

En particulier, p, q et r sont des fonctions continues sur l'intervalle ouvert $I = (1, \infty)$. On a déjà montré que la version homogène de cette équation, à savoir l'équation (2.12), possède deux solutions $y_1(t) = e^t$ et $y_2(t) = t$ linéairement indépendantes avec wronskien donné par

$$W(y_1, y_2) = e^t(1-t).$$

Ainsi, par le Théorème 2.28, on a une solution particulière $Y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$ avec

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\int \frac{y_2 r}{W(y_1, y_2)} dt = -\int \frac{t(\frac{1-t}{t})}{e^t(1-t)} = -\int e^{-t} dt = e^{-t} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ u_2(t) &= \int \frac{y_1 r}{W(y_1, y_2)} dt = \int \frac{e^t\left(\frac{1-t}{t}\right)}{e^t(1-t)} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_2 = \ln t + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où dans la deuxième ligne on a utilisé le fait que $t > 1$. La solution générale est donc donnée par

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t + 1 + t \ln t \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2.6 Oscillations dans les systèmes mécaniques et les circuits électriques

On a vu que pour les petits angles, l'équation linéarisée du pendule est

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0. \tag{2.20}$$

On obtient une équation de la même forme pour une masse m attachée à un ressort de constante de Hooke k. En effet, dans ce cas, si y est la position de la masse par rapport à

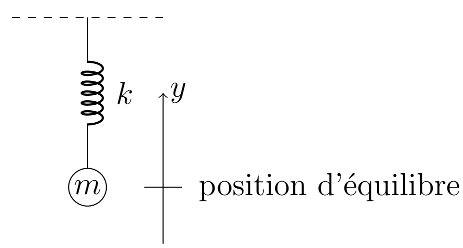


FIGURE 6 – Masse attachée à un ressort

la position d'équilibre, alors la loi de Hooke stipule que la force exercée par le ressort sur la masse est donnée par $-ky$. Si la résistance de l'aire est toujours proportionnelle à la vitesse et donnée par $-\alpha \frac{dy}{dt}$, alors la deuxième loi de Newton nous indique que l'accélération de la masse est donnée par

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{m}\left(-ky - \alpha \frac{dy}{dt}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0.$$

Dans un circuit électrique ayant une résistance R , un condensateur de capacité C et un inducteur d'inductance L en série, cette équation apparaît aussi naturellement. Soit I est l'intensité du courant électrique dans le circuit et soit Q est la charge électrique contenue dans le condensateur. Dans ce cas, on a les chutes de tension suivantes le long du circuit :

1. la loi d'Ohm stipule qu'il y a une chute de tension RI dans la résistance ;
2. la chute de tension dans le condensateur est donné par $\dfrac{Q}{C}$;
3. La loi de Faraday stipule que la chute de tension dans l'inducteur est donnée par $L\dfrac{dI}{dt}$.

D'autre part, par la seconde loi de Kirchoff, la somme des chutes de tension le long du circuit fermé doit être nulle. Pour le circuit de la Figure 7, cela donne l'équation

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t), \tag{2.21}$$

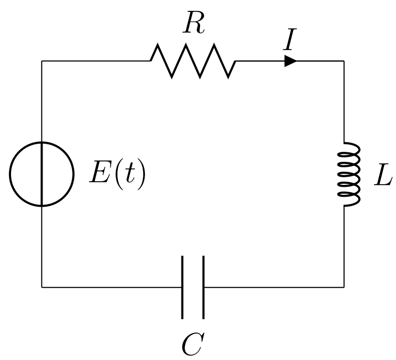


FIGURE 7 – Circuit RLC

où $E(t)$ est la tension engendrée par une pile ou une prise de courant. Or comme $I = \frac{dQ}{dt}$, cela donne l'équation

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t). \tag{2.22}$$

En dérivant l'équation (2.21) par rapport à t, cela donne aussi une équation pour le courant :

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = E'(t). \tag{2.23}$$

On a donc les correspondances suivante entre les systèmes mécaniques et électriques :

Oscillations mécaniques	Oscillations électriques
Position y	Charge Q dans le condensateur
Constante de Hooke k	C^{-1}, l'inverse de la capacitance du condensateur
Constante de friction α	Résistance électrique R
Masse m	Inductance L de l'inducteur
Force extérieure $F(t)$	Tension $E(t)$ engendrée par une prise de courant ou une pile.

Regardons de plus près les oscillations dans un système mécanique masse-ressort. D'abord, lorsqu'il n'y a pas de résistance de l'air, c'est-à-dire que les oscillations ne sont pas amorties, l'équation prend la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et on a vu déjà que la solution générale d'une telle équation est

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \quad A, B \in \mathbb{R}. \tag{2.24}$$

Alternativement, on peut aussi présenter la solution générale sous la forme

$$y(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta), \quad R, \delta \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

En effet, en utilisant l'identité trigonométrique

$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi,$$

on a que

$$R\cos(\omega_0 t - \delta) = (R\cos\delta)\cos\omega_0 t + (R\sin\delta)\sin\omega_0 t,$$

de sorte que les deux manières de présenter la solution générale s'équivalent en prenant

$$\begin{array}{l} A = R\cos\delta \\ B = R\sin\delta \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} A^2 + B^2 = R^2(\cos^2\delta + \sin^2\delta) = R^2 \\ \tan\delta = \frac{B}{A}. \end{array}$$

Autrement dit, en prenant $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\delta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$, on a bien que

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = R\cos(\omega_0 t - \delta).$$

On dit que R est **l'amplitude** des oscillations et que δ est leur **phase**. Cela peut être encodé dans le triangle suivant :

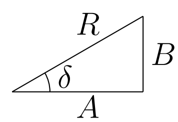


Figure 8 – Triangle de la phase et de l'amplitude des oscillations

Lorsque la résistance de l'air n'est pas négligeable, on parle alors d'oscillations amorties. L'équation différentielle est alors donnée par (2.20) avec $\gamma = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Les racines de l'équation caractéristique correspondante sont données par

$$r = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}.$$

Lorsque $\gamma^2 < 4\omega_0^2$, on est en régime **pseudo-périodique**, car alors

$$r = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega \quad \text{avec } \omega = \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2}$$

et la solution générale est donnée par

$$y(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) = Re^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega t - \delta).$$

Dans ce cas, l'amplitude des oscillations évolue au cours du temps et est donnée par $Re^{-\frac{\gamma t}{2}}$.

Lorsque $\gamma^2 > 4\omega_0^2$, on est plutôt en régime **apériodique**, puisqu'alors les racines de l'équation caractéristique sont réelles, données par

$$r_1 := -\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0}}{2}, \quad \text{et} \quad r_2 := -\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0}}{2}.$$

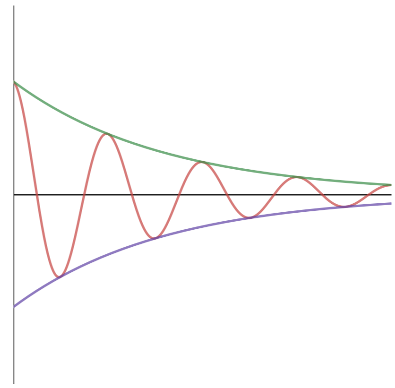


FIGURE 9 – Graphe d'une solution avec des oscillations amorties, les courbes verte et bleue correspondant à l'amplitude des oscillations

Comme $\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} < \gamma$, ces racines sont en fait strictement négatives :

$$r_1 < r_2 < 0.$$

De plus, la solution générale est de la forme

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad avec\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Enfin, lorsque $\gamma^2 = 4\omega_0^2$, on est dans le régime **apériodique critique**. L'équation caractéristique n'a alors qu'une seule racine double donnée par

$$r = -\frac{\gamma}{2},$$

de sorte que la solution générale est de la forme

$$y(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} + Bte^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Peu importe le régime dans lequel on se trouve, les solutions convergent exponentiellement rapidement vers 0.

2.7 Oscillations forcées amorties

Supposons maintenant qu'il y ait une force externe $F(t) = F_0 \cos \nu t$ périodique de fréquence angulaire ν. L'équation différentielle correspondante est alors

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos(\omega t). \tag{2.26}$$

Remarque 2.29. Pour un circuit électrique, $F(t)$ correspondrait à la tension $E(t)$ induite par un courant alternatif.

Pour trouver une solution particulière à l'équation, on peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés et rechercher une solution de la forme

$$Y(t) = A\cos \nu t + B \sin \nu t \quad \Longrightarrow \quad Y'(t) = -A\nu \sin \nu t + B\nu \cos \nu t \quad \Longrightarrow \quad Y''(t) = -\nu^2 Y(t).$$

Pour que ce soit une solution, il faut donc que

$$\begin{aligned}
= F_0 \cos \nu t &= mY'' + \alpha Y' + kY. \\
&= -m\nu^2(A\cos\nu t + B\sin\nu t) + \alpha\nu(-A\sin\nu t + B\cos\nu t) + k(A\cos\nu t + B\sin\nu t) \\
&= (-mA\nu^2 + \alpha\nu B + kA)\cos\nu t + (-m\nu^2 B - \alpha A\nu + kB)\sin\nu t.
\end{aligned}$$

Cela donne lieu à deux équations pour les inconnues A et B :

$$\begin{array}{ll} (k-m\nu^2)A + \alpha\nu B & = F_0 \\ -\alpha\nu A + (k-m\nu^2)B & = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rl} B & = \frac{\alpha\nu A}{k-m\nu^2} \\ (k-m\nu^2)A + \frac{\alpha^2\nu^2}{k-m\nu^2}A & = F_0 \end{array}.$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} A & = \frac{F_0(k-m\nu^2)}{(k-m\nu^2)^2+\alpha^2\nu^2} \\ B & = \frac{F_0\alpha\nu}{(k-m\nu^2)^2-\alpha^2\nu^2}. \end{array}$$

Si on veut mettre $Y(t)$ sous la forme $Y(t) = R\cos(\nu t - \delta)$, alors il faut que

$$R = \sqrt{A^2+B^2} = \frac{F_0\sqrt{(k-m\nu^2)^2+\alpha^2\nu^2}}{(k-m\nu^2)^2+\alpha^2\nu^2} = \frac{F_0}{\Delta}$$

avec

$$\Delta = \sqrt{(k-m\nu^2)^2+\alpha^2\nu^2} = \sqrt{m^2(\omega_0^2-\nu^2)^2+(\alpha\nu)^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et

$$\cos\delta = \frac{A}{R} = \frac{k-m\nu^2}{\Delta} \quad \text{et} \quad \sin\delta = \frac{\alpha\nu}{\Delta}.$$

On a donc un solution particulière $Y(t) = R\cos(\nu t - \delta)$ avec

$$R = \frac{F_0}{\Delta} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\nu^2)^2+(\alpha\nu)^2}}. \tag{2.27}$$

On peut regarder l'amplitude R comme une fonction de ν. Quel est son maximum ? Quel est son graphe ? D'abord, on calcule que

$$\lim_{\nu\to 0} R(\nu) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \quad \text{et} \quad \lim_{\nu\to\infty} R(\nu) = 0.$$

D'autre part, la dérivée de $R(\nu)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\nu}R(\nu) &= \frac{-F_0}{2\left(m^2(\nu^2-\omega_0^2)^2+\alpha^2\nu^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-2m^2(\omega_0^2-\nu^2)2\nu + 2\alpha^2\nu\right) \\
&= \frac{-F_0\nu(-2m^2(\omega_0^2-\nu^2)+\alpha^2)}{(m^2(\nu^2-\omega_0^2)^2+\alpha^2\nu^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{d\nu} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \nu = 0 \text{ ou } -2m^2(\omega_0^2-\nu^2)+\alpha^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \nu = 0 \text{ ou } \nu = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}},
\end{aligned}$$

où on suppose que $\omega_0^2 > \frac{\alpha^2}{2m^2}$. La dérivée de $R(\nu)$ est donc positive entre zéro et $\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}}$ et négative pour $\nu > \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}}$. On en conclut que $R(\nu)$ atteint un maximum en

$$\nu_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}}$$

lorsque $\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2} > 0$ avec

$$\begin{aligned} R_{\max} = R(\nu_{\max}) &= \frac{F_0}{\sqrt{\frac{\alpha^4}{4m^2} + \alpha^2\left(\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}\right)}} = \frac{F_0}{\sqrt{\alpha^2\omega_0^2 - \frac{\alpha^4}{4m^2}}} = \frac{F_0}{\alpha\omega_0\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4mk}}} \\ &\approx \frac{F_0}{\alpha\omega_0}\left(1 + \frac{\alpha^2}{8mk}\right) \quad \text{pour } \alpha \text{ petit.} \end{aligned}$$

Ainsi, pour α petit, $R_{\max} \approx \frac{F_0}{\alpha\omega_0}$ est très grand pour $\nu = \nu_{\max}$. De plus, cet effet est d'autant plus prononcé que α est petit.

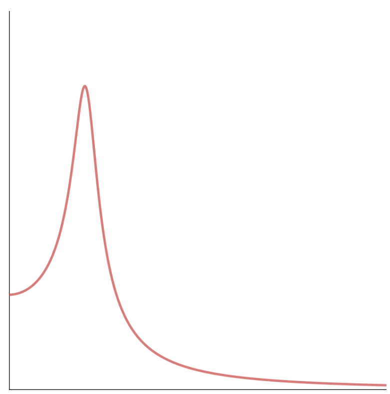


FIGURE 10 – Le graphe de R en tant que fonction de ν pour α petit

Si y_1 et y_2 forment un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène, alors la solution générale est donnée par

$$y(t) = R\cos(\nu t - \delta) + k_1y_1 + k_2y_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

La partie $y^*(t) = k_1y_1 + k_2y_2$ est appelée la **solution transitoire**, car l'amplitude de cette solution décroît vers zéro exponentiellement rapidement. La partie $Y(t) = R\cos(\nu t - \delta)$ est appelée la **solution permanente** ou **réponse forcée**, car c'est la partie qui subsiste lorsqu'on attend assez longtemps.

Définition 2.30. La fréquence $\nu_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}}$ est la **fréquence de résonance** du système mécanique. C'est la fréquence à laquelle l'amplitude de la réponse forcée est maximale.

Cette sensibilité du système à certaines fréquences est ce qu'on appelle un **phénomène de résonance**. Des exemples importants de phénomènes de résonances sont :

1. Récepteur radio : l'idée de base est d'ajuster les paramètres d'un circuit électrique pour que le circuit résonne à la fréquence $\nu_{\max}$ désirée ;
2. Une troupe traversant au pas un pont peut le rompre si la fréquence des pas est près de la fréquence de résonance du pont ;
3. Un verre de cristal qui éclate au son d'une voix chantant à une note correspondant la fréquence de résonance du verre ;
4. Un adulte qui pousse un enfant sur une balançoire.

2.8 Oscillations forcées non amorties

Considérons l'équation précédente avec $\alpha = 0$:

$$my'' + ky = F_0 \cos \nu t.$$

Lorsque $\nu \neq \omega_0$, la solution générale est

$$y(t) = R\cos(\nu t - \delta) + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

où

$$R = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \nu^2)} \quad \text{et} \quad \sin \delta = \frac{\alpha \nu}{\Delta} = 0, \cos \delta = 1.$$

En prenant $\delta = 0$, la solution générale est donc

$$y(t) = \left(\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \nu^2)}\right) \cos(\nu t) + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Quand on combine des fonctions trigonométriques de périodes différentes, il y a un phénomène de **pulsation**. Considérons le cas particulier où $c_1 = R$ et $c_2 = 0$, de sorte que

$$\begin{aligned} y(t) &= R\cos \nu t + R\cos \omega_0 t = R\left(\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)\right), \quad \theta = \frac{\nu t + \omega_0 t}{2}, \ \phi = \frac{\nu t - \omega_0 t}{2} \\ &= 2R\cos\theta\cos\phi = 2R\cos\left(\frac{(\nu - \omega_0)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega_0 + \nu)t}{2}\right). \end{aligned}$$

Dans ce cas, la fonction $\cos\left(\frac{(\nu + \omega_0)t}{2})\right)$ a une fréquence angulaire élevée par rapport à celle de $\cos\left(\frac{(\nu - \omega_0)t}{2}\right)$, et donc oscille plus rapidement. Cela suggère de considérer

$$A(t) := R\cos\left(\frac{(\nu - \omega_0)t}{2}\right) \tag{2.28}$$

comme une amplitude changeant doucement avec le temps comme indiqué à la Figure 11.

Lorsque $\nu = \omega_0$, en suivant la méthode des coefficients indéterminés, la solution particulière est plutôt de la forme

$$Y(t) = t(A\cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t).$$

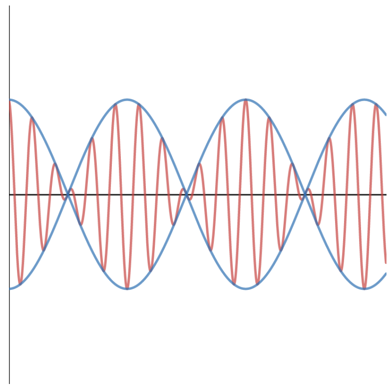


FIGURE 11 – Graphe de la solution (2.28) en rouge modulée par l'amplitude $A(t)$ en bleu

On calcule que

$$\begin{aligned}
Y'(t) &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + t(-A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) \\
Y''(t) &= 2\omega_0(-A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) + t\omega_0^2(-A\cos\omega_0 t - B\sin\omega_0 t).
\end{aligned}$$

Pour que $Y(t)$ soit une solution, il faut donc que

$$\begin{aligned}
F_0\cos\omega_0 t &= mY'' + kY \\
&= m\left(2\omega_0(-A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) + t\omega_0^2(-A\cos\omega_0 t - B\sin\omega_0 t)\right) \\
&\qquad + kt\left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right) \\
&= 2m\omega_0\left(-A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t\right), \quad \text{car } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.
\end{aligned}$$

Il faut donc que $A = 0$ et que

$$2m\omega_0 B = F_0 \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{F_0}{2\omega_0 m} \quad \Longrightarrow \quad Y(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin\omega_0 t.$$

Le graphe de cette solution est donné par la Figure 12. L'amplitude devient de plus en plus

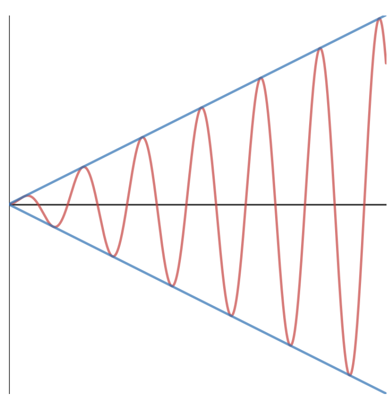


FIGURE 12 – Graphe de $Y(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin\omega_0 t$ en rouge

grande à mesure que le temps passe.

2.9 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace fournit une autre méthode pour résoudre les équations différentielles ordinaires linéaires.

Définition 2.31. Pour f une fonction intégrable sur $[0,\infty)$, on définit sa **transformée de Laplace** par

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Pourvu que la fonction $|f(t)|$ soit bornée par une exponentielle, sa transformée de Laplace existera pour s assez grand.

Exemple 2.32. Si $f(t) = e^{at}$, alors

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \quad \text{si } s > a,$$

car autrement l'intégrale diverge.

Exemple 2.33. Si

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

alors

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^1 e^{-st}dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^1 = -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s}, \quad \text{pour } s \neq 0.$$

Pour $s = 0$, on a d'autre part

$$\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^1 dt = 1.$$

Remarquons en particulier que

$$\lim_{s\to 0} \mathcal{L}(f)(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1-e^{-s}}{s} = -\left.\frac{d}{ds}(e^{-s})\right|_{s=0} = e^{-s}|_{s=0} = 1 = \mathcal{L}(f)(0),$$

donc la fonction $\mathcal{L}(f)$ est aussi continue en $s = 0$.

Théorème 2.34. *Si f est une fonction différentiable dont la valeur absolue est bornée par une exponentielle, alors la transformée de Laplace de sa dérivée est donnée par*

$$\mathcal{L}(f')(s) = -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s).$$

Démonstration. On calcule que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty u dv, \quad u = e^{-st}, \quad dv = f'(t)dt, \quad v = f(t), \\
&= uv|_0^\infty - \int_0^\infty v du, \quad \text{en intégrant par parties}, \\
&= f(t)e^{-st}|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\left(-se^{-st}\right)dt \\
&= -f(0) + \int_0^\infty f(t)se^{-st}dt \quad \text{pour } s \text{ assez grand}, \\
&= -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.35. *Si f est une fonction deux fois différentiable bornée en valeur absolue par une exponentielle, ainsi que sa première dérivée, alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'')(s) &= -f'(0) + s\mathcal{L}(f')(s). \\
&= -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}(f)(s).
\end{aligned}$$

Plus généralement, pour f une fonction n fois différentiable qui, avec ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, est bornée absolument par une exponentielle, on a que

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = -\left(f^{(n-1)}(0) + sf^{(n-2)}(0) + \cdots + s^{n-1}f(0)\right) + s^n\mathcal{L}(f)(s).$$

Cette observation est utile pour résoudre une équation différentielle ordinaire linéaire dont les conditions initiales sont spécifiées, par exemple l'équation

$$y'' + 4y' + 4y = r(t), \quad y(0) = y_0, \ y'(0) = v_0. \tag{2.29}$$

En prenant la transformée de Laplace de chaque côté de l'équation et en utilisant le Théorème 2.34 et son corollaire, on obtient que

$$(-y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}(y)(s)) + 4(-y(0) + s\mathcal{L}(y)(s)) + 4\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(r)(s),$$

c'est-à-dire que

$$(s^2 + 4s + 4)\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(r) + y'(0) + (s+4)y(0) = \mathcal{L}(r)(s) + v_0 + (s+4)y_0.$$

En isolant $\mathcal{L}(y)$, cela donne

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{\mathcal{L}(r)(s) + v_0 + (s+4)y_0}{s^2 + 4s + 4}.$$

S'il était possible d'inverser la transformée de Laplace, on aurait donc que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(r)(s) + v_0 + (s+4)y_0}{s^2 + 4s + 4}\right).$$

Théorème 2.36 (donné sans preuve)**.** *Si f et g sont des fonctions continues bornées absolument par des exponentielles, alors*

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \quad \Longrightarrow \quad f = g.$$

En pratique, pour calculer l'inverse de la transformée de Laplace, on utilise le fait qu'elle est linéaire,

$$\mathcal{L}(c_1 f + c_2 g) = c_1\mathcal{L}(f) + c_2\mathcal{L}(g) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}(c_1 F + c_2 G) = c_1\mathcal{L}^{-1}(F) + c_2\mathcal{L}^{-1}(G),$$

de sorte qu'on peut essayer de décomposer la fonction d'intérêt en une somme de fonctions pour lesquelles on connait la transformée de Laplace inverse. Voici quelques transformées de Laplace faciles à calculer :

$f(t)$	1	t	t^n	e^{at}	$\cos bt$	$\sin bt$
$\mathcal{L}(f)(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$

Exemple 2.37. On calcule que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t)(s) &= \int_0^\infty te^{-st}dt = \int_0^\infty udv, \quad u = t, dv = e^{-st}dt,\ v = -\frac{e^{-st}}{s}, \\
&= uv|_0^\infty - \int_0^\infty vdu \quad \text{en intégrant par parties,} \\
&-\frac{te^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}dt = 0 + \frac{1}{s}\mathcal{L}(1)(s) \\
&= \frac{1}{s^2}.
\end{aligned}$$

Lemme 2.38. *Pour f une fonction continue bornée absolument par une exponentielle, on a que*

$$\mathcal{L}(e^{at}f)(s) = \mathcal{L}(f)(s-a)$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. La preuve est immédiate :

$$\mathcal{L}(e^{at}f)(s) = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt = \mathcal{L}(f)(s-a).$$

□

Inversement, si pour $\alpha \geq 0$,

$$\chi_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t < \alpha, \\ 1, & t \geq \alpha, \end{cases}$$

alors pour f une fonction continue et bornée absolument par une exponentielle, on a que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\chi_\alpha(t)f(t-\alpha))(s) = \int_\alpha^\infty f(t-\alpha)e^{-st}dt &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}e^{-s\alpha}d\tau, \quad \text{en posant } \tau = t-\alpha,\\ &= e^{-s\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-s\alpha}\mathcal{L}(f)(s).\end{aligned}$$

Retournons à l'équation (2.29) et supposons que $r(t) = t$. Dans ce cas, on a que

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(t)(s) + v_0 + (s+4)y_0}{s^2+4s+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s^2} + v_0 + (s+4)y_0}{(s+2)^2}\right)\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+2)^2} + \frac{v_0}{(s+2)^2} + \frac{(s+4)y_0}{(s+2)^2}\right).\end{aligned}$$

Or, par la discussion qui précède, on calcule que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{v_0}{(s+2)^2}\right) = v_0e^{-2t}t$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+4)y_0}{(s+2)^2}\right) &= y_0\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right)\right)\\ &= y_0(e^{-2t} + 2te^{-2t}) = y_0e^{-2t}(1+2t).\end{aligned}$$

D'autre part, dans le but d'utiliser la méthode des fractions partielles, posons

$$\frac{1}{s^2(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2}.$$

En multipliant de chaque côté par $s^2(s+2)^2$, cela donne

$$\begin{aligned}1 &= As(s+2)^2 + B(s+2)^2 + Cs^2(s+2) + Ds^2\\ &= A(s^3+4s^2+4s) + B(s^2+4s+4) + C(s^3+2s^2) + Ds^2\\ &= (A+C)s^3 + (4A+B+2C+D)s^2 + (4A+4B)s + 4B.\end{aligned}$$

Cela donne quatre équations à quatre inconnues,

$$\left.\begin{aligned}4B &= 1\\ 4A+4B &= 0\\ 4A+B+2C+D &= 0\\ A+C &= 0\end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned}B &= \tfrac{1}{4}\\ A &= -B = -\tfrac{1}{4}\\ C &= -A = \tfrac{1}{4}\\ D &= -4A-B-2C = 1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2(s+2)^2}) &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right)\\ &= -\frac{1}{4} + \frac{t}{4} + e^{-2t}\left(\frac{1}{4} + \frac{t}{4}\right),\end{aligned}$$

d'où finalement que

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+2)^2} + \frac{v_0}{(s+2)^2} + \frac{(s+4)y_0}{(s+2)^2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(t-1+e^{-2t}(1+t)\right) + v_0te^{-2t} + y_0(1+2t)e^{-2t}.\end{aligned}$$

2.10 La loi d'attraction universelle et les orbites des planètes

En s'appuyant sur les observations minutieuses de Tycho Brahe, notamment concernant la trajectoire de la planète Mars, Johannes Kepler a formulé au dix-septième siècle trois lois sur les orbites des planètes autour du Soleil :

1. les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers (1609) ;
2. les aires balayées par le rayon vecteur joignant le centre du Soleil au centre de la planète sont proportionnelles aux temps employés à les décrire (1609) ;
3. les carrés des temps des révolutions sidérales des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites (1619).

À l'époque, Kepler soupçonnait déjà que le mouvement des planètes était du à une force d'attraction entre les corps. Ce n'est cependant que plus tard au dix-septième siècle que Isaac Newton a réussi à déduire mathématiquement les trois lois de Kepler à partir du principe de l'attraction universelle : *l'attraction gravitationnelle entre deux corps est proportionnelle à l'inverse de leur distance au carré*. Pour y arriver, Newton a dû littéralement inventer le calcul différentiel et intégral, mais aussi résoudre un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires. Cependant, en s'appuyant sur les symétries du problème, on peut se ramener à une seule équation différentielle ordinaire. Dans cette section, nous allons expliquer comment dériver cette équation et comment sa résolution permet d'obtenir les trois lois de Kepler.

Considérons donc une planète de masse m (e.g. la planète Mars) tournant autour d'une étoile de masse M beaucoup plus massive (e.g. le Soleil) située à l'origine. Supposons pour l'instant que la force exercée par cette étoile sur cette planète est centrale, c'est-à-dire que

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(\vec{r})\vec{r},$$

où $\vec{r}(t)$ est la position de la planète au temps t. Soit aussi $\vec{v}(t)$ la vitesse de la planète au temps t.

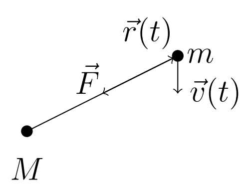


FIGURE 13 – Système planète-étoile

Par la deuxième loi de Newton, on a que

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \implies \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{F(\vec{r})}{m}\vec{r}.$$

Cela implique que le moment cinétique de la planète, donné par

$$\vec{L} := \vec{r} \times m\vec{v}$$

est préservé, c'est-à-dire qu'il n'évolue pas au cours du temps. En effet, puisque le produit vectoriel $\vec{w} \times \vec{w} = 0$ d'un vecteur avec lui-même est toujours nul, on calcule que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = m\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \\ = m\left(\vec{v} \times \vec{v} + \frac{F(\vec{r})}{m}\vec{r} \times \vec{r}\right) = m(0+0) = 0.\end{aligned}$$

En particulier, comme $\vec{r}$ est perpendiculaire à $\vec{L}$ par définition du moment cinétique $\vec{L}$, on voit que la planète reste nécessairement dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}$:

$$P = \left\{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{w} \cdot \vec{L} = 0\right\}.$$

Plus généralement, la conservation du moment cinétique a pour conséquence la deuxième loi de Kepler : *dans le plan P, le vecteur $\vec{r}$ balaie des aires égales pour des intervalles de temps égaux.* Pour le voir, soit $A(t)$ l'aire balayée par $\vec{r}(t)$ à partir d'un certain moment t_0. Alors la dérivée de A par rapport au temps est donnée par

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| = \frac{|\vec{L}|}{2m} \tag{2.30}$$

et ne dépend pas du temps. L'aire balayée par le vecteur $\vec{r}$ est donc proportionnelle au temps écoulé.

En choisissant une base orthonormale $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ de P, on a en coordonnées polaires que

$$\vec{r} = r\vec{u}_r = r(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}),$$

où r et θ son des fonctions dépendant de t, $r = |\vec{r}|$ étant la distance entre l'étoile et la planète et θ étant l'angle formé par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{r}$. Pour les prochains calculs, nous allons utiliser les notations

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{f} = \frac{d^2 f}{dt^2}$$

pour f une fonction dépendant du temps t. Dans ce cas, on calcule que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta,$$

où

$$\vec{u}_\theta = \frac{d}{d\theta}\vec{u}_r = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath},$$

et

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\vec{u}_\theta) + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

puisque

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\vec{u}_\theta = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = \dot{\theta}(-\cos\theta\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath}) = -\dot{\theta}\vec{u}_r.$$

Comme la force est centrale, on a donc que

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r,\theta)r \quad \text{et} \quad m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0. \tag{2.31}$$

La deuxième équation correspond au fait que le moment cinétique est préservé. En effet, on a que

$$\begin{aligned}
\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} &= (r\vec{u}_r) \times m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = (mr^2\dot{\theta})\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta \\
&= (mr^2\dot{\theta})(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) \times (-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) \\
&= (mr^2\dot{\theta})(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) \\
&= L\vec{k}
\end{aligned}$$

avec $L = |\vec{L}| = mr^2\dot{\theta}$ et $\vec{k} = \vec{\imath} \times \vec{\jmath}$. Ainsi, le fait que L soit une quantité conservée implique que

$$0 = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}),$$

en accord avec la deuxième partie de (2.31).

Pour l'instant, on a seulement utilisé le fait que la force due à l'attraction de l'étoile sur la planète pointe vers l'étoile. On peut obtenir plus d'information en utilisant la loi d'attraction universelle de Newton

$$\vec{F} = F(r)\vec{r} \quad \text{avec} \quad F(r) = -\frac{GMm}{r^3},$$

où G est la constante gravitationnelle. En insérant dans l'équation $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, on obtient

$$F(r)\vec{r} = F(r)r\vec{u}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r \quad \Longrightarrow \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{K}{r^2} \quad \text{avec } K := GM.$$

On peut utiliser le fait que le moment cinétique $L = mr^2\dot{\theta}$ est préservé pour se débarasser de $\dot{\theta}$ dans l'équation :

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{r} - r\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 = -\frac{K}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3} = -\frac{K}{r^2}.$$

C'est une équation différentielle ordinaire non linéaire. Pour la résoudre, on peut se ramener à une équation linéaire en faisant le changement de variable $z = \dfrac{1}{r}$ et en regardant z comme une fonction de θ, $z = z(\theta(t))$. Dans ce cas, on a que

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{dz}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{dz}{d\theta} \\
\frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{m}\frac{dz}{d\theta}\right) = -\frac{L}{m}\frac{d^2z}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2z}{d\theta^2} = -\frac{L^2z^2}{m^2}\frac{d^2z}{d\theta^2},
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3} = -\frac{K}{r^2} \quad &\Longrightarrow \quad -\frac{L^2z^2}{m^2}\frac{d^2z}{d\theta^2} - \frac{L^2z^3}{m^2} = -Kz^2 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{Km^2}{L^2} \\
&\quad\quad z = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta + \frac{Km^2}{L^2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En choisissant la base orthonormale $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ du plan P de sorte que z soit maximal en $\theta = 0$, c'est-à-dire que r soit minimal en $\theta = 0$, on aura que

$$\frac{dz}{d\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2z}{d\theta^2} \leq 0 \quad \text{en } \theta = 0,$$

ce qui signifie que $C_2 = 0$ et que

$$z = C_1 \cos\theta + \frac{Km^2}{L^2} \quad avec\ C_1 > 0.$$

Ainsi, on trouve finalement que

$$r = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{Km^2}{L^2} + C_1 \cos\theta} = \frac{\frac{L^2}{Km^2}}{1 + \left(\frac{C_1 L^2}{m^2 K}\right)\cos\theta}. \tag{2.32}$$

Cette équation est en fait celle d'une conique en coordonnées polaires. En effet, si P est un

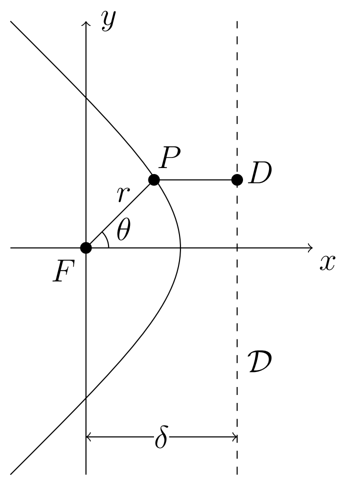


FIGURE 14 – Conique de foyer F de droite directrice $\mathcal{D}$

point de coordonnées polaires (r, θ) appartenant à une conique d'excentricité e, de foyer F à l'origine et de droite directrice $\mathcal{D}$ d'équation $x = \delta$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = e \quad &\Longrightarrow \quad \frac{r}{\delta - r\cos\theta} = e \quad \Longrightarrow r = \delta e - re\cos\theta \\ &\Longrightarrow \quad (1 + e\cos\theta)r = \delta e \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{\delta e}{1 + e\cos\theta}. \end{aligned}$$

On obtient une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$ et une hyperbole si $e > 1$. En effet, en coordonnées cartésiennes,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = e \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\delta - x} = e \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = e(\delta - x) \\ &\Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = e^2(\delta^2 - 2\delta x + x^2) \\ &\Longrightarrow \quad (1-e^2)x^2 + y^2 + 2\delta x e^2 = e^2\delta^2, \end{aligned}$$

donc si $e < 1$, cette équation prend la forme

$$\left(\sqrt{1-e^2}x + \frac{\delta e^2}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2 + y^2 = e^2\delta^2 + \frac{\delta^2 e^4}{1-e^2} = \frac{\delta^2 e^2}{1-e^2}, \tag{2.33}$$

c'est-à-dire l'équation d'une ellipse, alors que si $e = 1$, on obtient l'équation d'une parabole

$$x = \frac{-y^2 + e^2\delta^2}{2\delta e^2},$$

et finalement si $e > 1$, on a plutôt l'équation d'une hyperbole

$$\left(\sqrt{e^2-1}x - \frac{\delta e^2}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2 - y^2 = \frac{\delta^2 e^4}{e^2-1} - e^2\delta^2 = \frac{e^2\delta^2}{e^2-1}.$$

Pour une planète qui reste à distance bornée de l'étoile, il faut donc que $e = \frac{C_1 L^2}{m^2 K} < 1$, ce qui donne la première loi de Kepler : *l'orbite de la planète est une ellipse dont l'un des foyers est l'étoile de masse M*. Dans ce cas, la distance entre la droite directrice et l'origine est donnée par

$$\delta = \frac{1}{C_1}.$$

Remarquons que l'équation (2.33) peut être mise sous la forme plus familière

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.34}$$

avec

$$a = \frac{\delta e}{1-e^2} > b = \frac{\delta e}{\sqrt{1-e^2}} \quad \text{et} \quad x_0 = -\frac{\delta e^2}{1-e^2}.$$

De ce point de vue, l'aire circonscrite par l'orbite elliptique de la planète est donnée par

$$\pi ab = \frac{\pi\delta^2 e^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.35}$$

D'autre part, si T est la période de révolution de la planète autour de l'étoile, alors par la formule (2.30) de laquelle découle la deuxième loi de Kepler, on a que

$$\pi ab = \frac{dA}{dt}T = \frac{L}{2m}T, \tag{2.36}$$

de sorte qu'en combinant (2.35) et (2.36), on obtient

$$\begin{aligned} T = \left(\frac{2m}{L}\right)\pi ab &= \left(\frac{2}{\sqrt{K\delta e}}\right)\left(\frac{\pi\delta^2 e^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{2\pi\delta^2 e^2}{\sqrt{K\delta e}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{K}}\left(\frac{\delta e}{1-e^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}}a^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Autrement dit, en prenant le carré de part et d'autre, on obtient la relation

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3, \tag{2.38}$$

qui n'est autre que la troisième loi de Kepler : *le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'orbite elliptique de la planète.*

2.11 Exercices

1. Calculer le wronskien des fonctions différentiables suivantes et déterminer si elles sont linéairement indépendantes sur l'intervalle $I = (-\infty, \infty)$:
   (a) $f(t) = t^2 + 3t$ et $g(t) = t^2 - 3t$;
   (b) $f(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ et $g(t) = e^{\lambda t}\sin(\mu t)$ lorsque $\mu \neq 0$;
   (c) $f(t) = x^3$ and $g(t) = |x^3|$.

2. Calculer le wronskien des fonctions $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $g(x) = 1 + x^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et déterminer si elles sont linéairement indépendantes.

3. À une constante multiplicative près, déterminer le wronskien de deux solutions de l'équation de Bessel
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$
   sans la résoudre, par exemple en utilisant le théorème d'Abel.

4. À une constante multiplicative près, déterminer le wronskien de l'équation de Legendre
$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx} + -2x\frac{dy}{dx} + \alpha(\alpha+1)y = 0, \quad x \in (-1, 1),$$
   sans la résoudre, par exemple en utilisant le théorème d'Abel.

5. Si le wronskien de fonctions différentiables f et g est $t\cos t - \sin t$ et si $u = f + 3g$ et $v = f - g$, trouver le wronskien de u et v.

6. Trouver la solution générale de l'équation différentielle
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 28y = 0$$
   en recherchant d'abord des solutions de la forme e^{rx} pour $r \in \mathbb{R}$.

7. Trouver la solution des équations différentielles suivantes et esquisser son graphe :
   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{x} + 5y = 0$ si $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$;

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{x} + 5y = 0$ si $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 2$.

8. En supposant que la résistance de l'air soit négligeable et en faisant l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \theta$, déterminer la longueur d'un pendule qui mettrait exactement une seconde pour faire une oscillation complète. On rappelle que l'accélération due à l'attraction terrestre est approximativement de $g = 9,8\ m/s^2$.

9. Trouver les solutions générales des équations différentielles non homogènes suivantes :

   (a) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = te^t$;

   (b) $t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = t^2$, pour t>0.

10. L'équation différentielle satisfaite par l'angle θ d'ouverture d'une porte à laquelle on a attaché un mécanisme de piston afin qu'elle se referme automatiquement après ouverture est donnée par

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + a\frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0,$$

   (a) Résoudre l'équation lorsque $a^2 > 4\omega^2$ et donner une interprétation physique du résultat.

   (b) Résoudre l'équation dans le cas critique où $a^2 = 4\omega^2$ et donner à nouveau une interprétation physique du résultat.

   (c) Si initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\theta'(0) = 0$, montrer dans le cas $a^2 = 4\omega^2$ que la porte se referme en douceur, c'est-à-dire sans que $\theta(t)$ prenne des valeurs négatives.

11. Trouver la solution générale de l'équation $9y'' - 12y' + 4y = 0$.

12. Considérons l'équation $ty'' - y' + 4t^3y = 0$ pour $t > 0$.

   (a) Montrer que $y_1(t) := \sin(t^2)$ est une solution de cette équation.

   (b) Trouver la solution générale de cette équation en applicant la méthode de d'Alembert.

13. Trouver la solution générales des équations différentielles suivantes en utilisant la méthodes des coefficients indéterminés :

   (a) $y'' + y' - 2y = 2t$;

   (b) $y'' + 4y = 3\sin(2t)$;

   (c) $y'' - y' - 2y = \cosh(2t)$.

14. Résoudre les équations suivantes en utilisant la méthode de variation des paramètres :

   (a) $y'' + 4y = g(t)$, où $g(t)$ est une fonction continue arbitraire ;

(b) $y'' + 9y = 9\sec^2(3t)$ pour $t \in (0, \frac{\pi}{6})$.

15. Montrer que $y_1(t) := t^2$ et $y_2(t) = t^{-1}$ forment un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène
$$t^2y'' - 2y = 0, \quad \text{pour } t > 0.$$

16. Utiliser la méthode de variation des paramètres et le problème précédent pour résoudre l'équation non homogène
$$t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad \text{pour } t > 0.$$

17. Mettre les fonctions suivantes sous la forme $u = R\cos(\omega t - \delta)$.
   (a) $u = 3\cos(2t) + 4\sin(2t)$;
   (b) $u = -2\cos\pi t - 3\sin\pi t$.

18. On considère un circuit RLC branché à une pile induisant une force électromotrice constante E_0, de sorte que l'équation différentielle associée est
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E_0.$$
Donner une formule de $Q(t)$ pour $t \geq 0$ et déterminer $\lim_{t\to\infty} Q(t)$ si initialement $Q(0) = 0$ et $I(0) = 0$.

19. Supposons qu'un tunnel soit creusé en ligne droite à travers la planète Terre pour se rendre d'un point A à un point B à sa surface. Si des rails sont installés, alors en négligeant la friction, un train placé initialement à une extrémité du tunnel commencera à se mouvoir sous l'effet de l'attraction terrestre et oscillera entre les deux extrémités.
   (a) Montrer que le temps requis pour effectuer un voyage aller-retour est le même peu importe le choix des extrémités.
   Indice : à l'intérieur de la Terre, la force gravitationnelle due à l'attraction terrestre pointe vers le centre de la Terre et est proportionnelle à la distance par rapport au centre de la Terre.
   (b) Le rayon de la Terre étant approximativement de 6371 km et l'accélération due la à force gravitationnelle de la Terre étant d'environ $9,8m/s^2$ à sa surface, estimer la durée d'un voyage aller-retour.
   (c) Si le tunnel est d'une longueur de 2km, quelle est la vitesse maximale atteinte par le train ?
   (d) Et si le tunnel passait plutôt par le centre de la Terre, quelle serait la vitesse maximale atteinte par le train (ascenseur serait peut-être un terme plus juste dans ce cas...) ?

20. Pour l'équation

$$my'' + \alpha y' + ky = F_0 \cos \omega t,$$

tracer le graphe de l'amplitude R de la réponse forcée $Y(t) = R\cos(\omega t - \delta)$ en fonction de ω lorsque $\omega_0^2 := \dfrac{k}{m} < \dfrac{\alpha^2}{2m^2}$. Y a-t-il une fréquence de résonance dans ce cas ?

21. Si la source de force électromotrice d'un circuit RLC est donnée par $E(t) = E_0 \cos \omega t$, alors l'équation différentielle satisfaite par le courant passant dans le circuit est donnée par

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -E_0 \omega \sin \omega t$$

   (a) Trouver la solution permanente $I_p(t) = -A\sin(\omega t - \delta)$ de cette équation différentielle et montrer que son amplitude est donnée par

$$A(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}}.$$

   (b) Trouver la fréquence de résonance $\omega_{\max}$ pour laquelle l'amplitude A est maximale.

   (c) Tracer le graphe de A en fonction de ω.

   (d) Supposons que la force électromotrice $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ soit induite par un faible signal électromagnétique de fréquence angulaire $\omega = 100\,\mathrm{Hz}$. Si l'inductance est de $L = 1\,\mathrm{H}$ et la résistance est de $R = 100\Omega$, comment doit-on choisir la capacitance (mesurée en farads) pour maximiser la réception du signal ?

22. Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

   (a) $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$;

   (b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \le t < 1, \\ 2 - t & \text{si } 1 \le t \le 2, \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}$

23. Calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } 0 \le t \le 2\pi, \\ 0 & \text{si } t > 2\pi. \end{cases}$

24. Trouver la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

   (a) $F(s) = \dfrac{se^{-s}}{(s+1)(s^2+1)}$;

   (b) $\dfrac{(s-1)^2 + 1}{s(s-1)^2}$.

25. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation $y''+y' = r(t)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ si $r(t) = \begin{cases} t & \text{si } 1 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$

26. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation $y''-y = r(t)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ si $r(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ t & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$

27. En utilisant la troisième loi de Kepler (équation (2.38)), estimer la masse du Soleil, sachant que le demi-grand axe de l'orbite de la Terre est d'environ $1,496 \times 10^{11} m$ et que la valeur de la constante gravitationnelle est de $G = 6,673 \times 10^{-11} m^3/(kg \cdot s^2)$.

3 Solutions en séries entières

On considère l'équation homogène

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0. \tag{3.1}$$

On ne supposera pas que P, Q et R sont des constantes, mais on supposera que ce sont des fonctions analytiques, c'est-à-dire telles que leur série de Taylor converge vers la valeur de la fonction. Les polynômes, la fonction exponentielle e^{rx} ainsi que les fonctions trigonométriques $\sin(\omega x)$ et $\cos(\omega x)$ sont tous des exemples de fonctions analytiques. Un exemple important de l'équation (3.1) avec P, Q et R des fonctions analytiques est **l'équation de Bessel** :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{3.2}$$

où $\nu \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Cette équation apparaît naturellement comme un problème intermédiaire lorsqu'on veut résoudre l'équation des ondes, l'équation de la chaleur ou l'équation de Laplace en coordonnées polaires, e.g. les coordonnées naturelles à utiliser pour étudier l'équation des ondes sur la membrane d'un tambour circulaire. Lorsqu'on travaille plutôt en trois dimensions et qu'on utilise les coordonnées sphériques, le problème intermédiaire sur lequel on tombe lorsqu'on veut résoudre l'équation des ondes ou l'équation de la chaleur est donné par **l'équation de Legendre** :

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + -2x\frac{dy}{dx} + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \tag{3.3}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Définition 3.1. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un **point ordinaire** de l'équation (3.1) si $P(x_0) \neq 0$. Dans ce cas, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \quad \text{avec} \quad p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)},\ q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$$

est telle que les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ sont aussi analytiques près de x_0. Si au contraire $P(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un **point singulier** de l'équation (3.1).

3.1 Solution près d'un point ordinaire

Pour trouver une solution près d'un point ordinaire x_0, on peut faire l'ansatz que la solution est analytique :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \tag{3.4}$$

Pour illustrer la méthode à suivre, considérons **l'équation d'Hermite** :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \tag{3.5}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Cette équation apparaît naturellement en mécanique quantique pour décrire l'oscillateur harmonique, le pendant quantique du système masse-ressort du chapitre précédent. Dans ce cadre, le paramètre λ correspond à l'énergie du système. Clairement, tout nombre réel est un point ordinaire de l'équation d'Hermite. En prenant $x_0 = 0$, on peut donc chercher une solution analytique de la forme

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

En se basant sur des résultats du cours d'Analyse II (MAT2150), on a alors que

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

En insérant ces expressions dans l'équation (3.5), cela donne

$$\sum_{n=0} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

En regroupant les différentes puissances de x, on obtient alors que

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+1)(n+2) - 2a_n + \lambda a_n]x^n = 0.$$

Or, par un résultat d'Analyse II (MAT2150), la seule manière que cette série soit identiquement nulle est que chacun de ses coefficients le soit :

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) - 2a_n n + \lambda a_n = 0 \quad \forall n \quad \Longrightarrow \quad a_{n+2} = \frac{(2n-\lambda)a_n}{(n+2)(n+1)}. \tag{3.6}$$

C'est une relation de récurrence. Supposons maintenant que a_0 et a_1 soient déjà donnés. Alors, par la relation de récurrence (3.6), on doit avoir que

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(2(2n-2)-\lambda)(a_{2n-2})}{2n(2n-1)} = \left(\frac{2(2n-2)-\lambda}{2n(2n-1)}\right)\left(\frac{2(2n-4)-\lambda}{(2n-2)(2n-3)}\right)a_{2n-4} \\ &= \cdots = \frac{(4(n-1)-\lambda)(4(n-2)-\lambda)\cdots(4-\lambda)(-\lambda)}{(2n)!}a_0 = \frac{\left[\prod_{k=0}^{n-1}(4k-\lambda)\right]}{(2n)!}a_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

et que

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{(2(2n-1)-\lambda)}{(2n+1)2n}a_{2n-1} = \left(\frac{2(2n-1)-\lambda}{(2n+1)2n}\right)\left(\frac{2(2n-3)-\lambda}{(2n-1)(2n-2)}\right)a_{2n-3} \\ &= \cdots = \left(\frac{4n-2-\lambda}{(2n+1)2n}\right)\left(\frac{4(n-1)-2-\lambda}{(2n-1)(2n-2)}\right)\cdots\left(\frac{4(1)-2-\lambda}{3\cdot 2}\right)a_1 \\ &= \frac{\left[\prod_{k=1}^{n}(4k-2-\lambda)\right]}{(2n+1)!}a_1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

En supposant que les séries qu'on obtient convergent, la solution générale est alors donnée par

$$y(x)=\sum_{n=0} a_n x^n = a_0\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(4k-\lambda)\right)\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)+a_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}(4k-2-\lambda)\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right). \tag{3.9}$$

Lorsque λ est un entier positif pair, l'une de ces séries est en fait un polynôme :

$$\begin{aligned}
\lambda=0 \quad &\Longrightarrow \quad a_2=\frac{0-\lambda}{2\cdot 1}=0 \quad \Longrightarrow \quad a_{2n}=0\ \forall n\in\mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad y(x)=a_0 \text{ est une solution,}\\
\lambda=2 \quad &\Longrightarrow \quad a_3=\frac{2-\lambda}{3\cdot 2}a_1=0 \Longrightarrow a_{2n+1}=0\ \forall n\in\mathbb{N} \Longrightarrow y(x)=a_1x \text{ est une solution,}\\
\lambda=4 \quad &\Longrightarrow \quad a_4=\frac{(2(2)-4)a_2}{4\cdot 3}=0,\ a_2=\frac{(0-4)a_0}{2\cdot 1}=-2a_0,\ a_{2n}=0,\ n>1,\\
&\Longrightarrow \quad y(x)=a_0+a_2x^2=a_0(1-2x^2) \text{ est une solution.}
\end{aligned}$$

Plus généralement, pour $k\in\mathbb{N}_0$, on dénote par $H_k(x)$ la solution polynômiale pour $\lambda=2k$ ayant 2^k comme coefficient devant x^k, donc en particulier

$$H_0(x)=1,\quad h_1(x)=2x,\quad H_2(x)=2-4x^2.$$

On dit que H_k est un **polynôme d'Hermite**. En général, on peut montrer que les polynômes d'Hermite sont donnés par

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}). \tag{3.10}$$

En mécanique quantique, l'équation de l'oscillateur harmonique n'est pas l'équation d'Hermite, mais plutôt l'équation

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\right)y=Ey, \tag{3.11}$$

où E est l'énergie de l'oscillateur. Cependant, on peut se ramener à l'équation d'Hermite en recherchant des solutions de la forme

$$y(x)=u(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\left(\frac{du}{dx}-xu\right)e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}+x^2u-u\right)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\right)y=Ey \quad &\Longrightarrow \quad -\left(\frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}-u\right)e^{-\frac{x^2}{2}}=Eue^{-\frac{x^2}{2}}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}+(E-1)u=0,
\end{aligned}$$

qui est l'équation d'Hermite avec $\lambda=E-1$. En mécanique quantique, on veut aussi que la solution $y(x)=u(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ soit de carré intégrable, ce qui fait en particulier qu'elle doit tendre vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$. C'est que la probabilité que l'oscillateur se trouve dans l'intervalle (a, b) est donnée par

$$\int_a^b |y(x)|^2 dx.$$

En particulier, il faut donc que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(x)|^2 dx = 1.$$

Avec cette condition, les seules solutions possibles pour $u(x)$ sont les polynômes d'Hermite. Pour les autres solutions, on peut vérifier que $y(x) = u(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ ne décroît pas vers zéro à l'infini. Pour cette raison, les seules énergies possibles pour l'oscillateur harmonique sont

$$E = 1 + \lambda = 1 + 2n, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Le théorème qui suit va nous garantir que lorsque x_0 est un point ordinaire, notre ansatz fonctionne à tous les coups.

Théorème 3.2 (Sans preuve)**.** *Si x_0 est un point ordinaire de l'équation*

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0,$$

alors près de x_0, la solution générale de l'équation est de la forme

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

avec y_1 et y_2 des fonctions analytiques près de x_0. De plus, les rayons de convergence des séries entières

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad \textit{et} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$$

sont au moins aussi grands que le minimum des rayons de convergence des séries entières de $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ et $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ en puissances de $(x - x_0)$.

On peut vérifier que la méthode fonctionne bel et bien en l'appliquant à une équation pour laquelle on connaît déjà l'espace des solutions, par exemple l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \tag{3.12}$$

Comme $x_0 = 0$ est un point ordinaire de l'équation, on peut chercher une solution analytique de la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_nnx^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_nn(n-1)x^{n-2}.$$

En insérant dans l'équation (3.12), cela donne

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d^2y}{dx^2} + y &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}(m+2)(m+1)x^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{en posant } m = n-2, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n] x^n.
\end{aligned}$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut que chaque terme s'annule, donc que

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}. \tag{3.13}$$

C'est une relation de récurrence qui nous permet de déterminer tous les coefficients en termes des deux premiers coefficients a_0 et a_1 :

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{-a_{2n-2}}{(2n)(2n-1)} = \frac{a_{2n-4}}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)} = \cdots = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \\
a_{2n+1} &= \frac{-a_{2n-1}}{(2n+1)(2n)} = \frac{a_{2n-3}}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)} = \cdots = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale est donnée par

$$\begin{aligned}
y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \\
&= a_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)x^{2n}}{(2n)!} \right) + a_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
& a_0 \cos x + a_1 \sin x, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

C'est bien la solution attendue !

3.2 La méthode de Frobenius

Lorsque x_0 n'est pas un point ordinaire, il est possible bien souvent de modifier l'ansatz pour trouver des solutions.

Définition 3.3. Un point x_0 est un point **singulier régulier** de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

si les fonctions $(x-x_0)p(x)$ et $(x-x_0)^2 q(x)$ sont analytiques près de x_0.

Remarque 3.4. En faisant le changement de variable $u = x - x_0$, on peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$.

Exemple 3.5 (Équation d'Euler)**.** L'équation d'Euler est donnée par

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xp_0\frac{dy}{dx} + q_0 y = 0 \quad \text{pour x>0},$$

où p_0 et q_0 sont des constantes. Dans ce cas, $x_0 = 0$ n'est pas un point ordinaire de l'équation, mais c'est un point singulier régulier. Pour résoudre l'équation d'Euler, on peut faire le changement de variable $u = \ln x$. En regardant y comme une fonction de u et en utilisant la règle de la chaîne, on calcule alors que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}\frac{dy}{du} = e^{-u}\frac{dy}{du},\\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{du}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)\\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{du^2}.
\end{aligned}$$

En substituant ces calculs dans l'équation, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xp_0\frac{dy}{dx} + q_0 y = \frac{x^2}{x^2}\left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\right) + \frac{xp_0}{x}\frac{dy}{du} + q_0 y\\
&= \frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du} + p_0\frac{dy}{du} + q_0 y = \frac{d^2y}{du^2} + (p_0 - 1)\frac{dy}{du} + q_0 y,
\end{aligned}$$

une équation linéaire homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique correspondante est

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0.$$

Si les racines r_1 et r_2 de cette équation sont réelles et distinctes, alor la solution générale est de la forme

$$y(u) = c_1 e^{r_1 u} + c_2 e^{r_2 u} = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Supposons maintenant que $x_0 = 0$ est un point singulier régulier de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \tag{3.14}$$

de sorte que

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{et} \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

sont analytiques près de $x = 0$. La **méthode de Frobenius** consiste alors à faire l'ansatz suivant sur la forme de la solution.

Ansatz : Recherchons une solution de la forme $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ pour $x > 0$ avec $r \in \mathbb{R}$ et $a_0 \neq 0$.

Dans ce cas, on calcule que

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}.$$

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned}
p(x)\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1}{x}xp(x)\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(m+r)x^{m+r-1}\right) \\
&= x^{r-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(m+r)x^m\right) = x^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}a_k(k+r)\right]x^n \\
&= x^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[p_0a_n(n+r) + \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k}a_k(k+r)\right]x^n.
\end{aligned}$$

De même, on a que

$$\begin{aligned}
q(x)y &= \frac{1}{x^2}x^2q(x)y = \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}\right) \\
&= x^{r-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = x^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right]x^n \\
&= x^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[q_0a_n + \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}a_k\right]x^n.
\end{aligned}$$

Pour que l'équation (3.14) soit satisfaite, il faut donc que

$$0 = x^{r-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(n+r)(n+r-1) + p_0a_n(n+r) + \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k}a_k(k+r) + q_0a_n + \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}a_k\right]x^n$$

c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n\left[(n+r)(n+r-1) + p_0(n+r) + q_0\right] = -\sum_{k=0}^{n-1}\left[p_{n-k}a_k(k+r) + q_{n-k}a_k\right], \tag{3.15}$$

alors que pour $n = 0$, on doit avoir que

$$a_0\left[r(r-1) + p_0r + q_0\right] = 0.$$

Comme on suppose que $a_0 \neq 0$, il faut donc que

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0. \tag{3.16}$$

On dit que l'équation (3.16) est **l'équation indicielle** de l'équation (3.14). En posant

$$F(r) := r(r-1) + p_0r + q_0,$$

l'équation indicielle correspond à $F(r) = 0$. En termes du polynôme $F(r)$, la relation de récurrence (3.15) peut se réécrire

$$a_n F(n+r) = -\sum_{k=0}^{n-1} \left[p_{n-k}(k+r) + q_{n-k}\right] a_k. \tag{3.17}$$

En principe, cette équation spécifie tous les termes de la série sauf si $F(n+r) = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Si r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation indicielle (3.16), cela ne peut se produire que si $r_2 - r_1 \in \mathbb{Z}$.

Supposons maintenant que les racines de l'équation indicielle sont réelles et telles que $r_1 \leq r_2$. Dans ce cas, pour $r = r_1$, on a que

$$\begin{aligned} F(n+r_1) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad n = 0 \text{ ou } n = r_2 - r_1, \\ &\Longrightarrow \quad a_n \text{ n'est pas déterminé pour } n \geq r_2 - r_1 \text{ si } \ r_2 - r_1 \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Si plutôt $r = r_2$, alors on a que

$$\begin{aligned} F(n+r_2) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad n = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \text{pour } n \geq 1, \ F(n+r_2) \neq 0, \\ &\Longrightarrow \quad a_n \text{ est complètement déterminé par les termes précédents.} \end{aligned}$$

La situation peut être résumée de la manière suivante.

Cas 1 : Les racines r_1 et r_2 de l'équation indicielle (3.16) sont distinctes et leur différence n'est pas un entier. Dans ce cas, on obtient deux solutions

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

de sorte que la solution générale soit donnée par

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 : Si $r_1 = r_2$ est une racine double, alors la méthode ne produit qu'une seule solution

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

On peut trouver une autre solution linéairement indépendante de y_1 en utilisant la méthode de réduction de l'ordre.

Cas 3 : Les racines sont distinctes avec $r_2 - r_1 \in \mathbb{N}$. La méthode donne alors une solution pour $r = r_2$,

$$y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Pour $r = r_1$, la relation de récurrence

$$a_n F(n+r_1) = -\sum_{k=0}^{n-1} \left[p_{n-k}(k+r) + q_{n-k}\right] a_k. \tag{3.18}$$

ne permet pas de déterminer a_n pour $n = r_2 - r_1$, car alors $F(n + r_1) = F(r_2) = 0$. Toutefois, si le terme de droite s'annule, on peut choisir a_n comme on veut, par exemple en prenant $a_n = 0$, et continuer d'appliquer la relation de récurrence pour obtenir une solution de la forme

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Si plutôt le terme de droite dans (3.18) ne s'annule pas, il faut utiliser la méthode de d'Alembert pour trouver une autre solution.

3.3 Équation de Bessel

Nous allons appliquer la méthode de Frobenius à l'équation de Bessel

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{3.19}$$

pour $\nu \geq 0$. En divisant par x^2, on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}y = 0 \tag{3.20}$$

avec $p(x) = \dfrac{1}{x}$ et $q(x) = \dfrac{x^2 - \nu^2}{x^2}$. Clairement, $x = 0$ est un point singulier régulier, puisque $xp(x) = 1$ et $x^2q(x) = x^2 - \nu^2$ sont des fonctions analytiques près de $x = 0$. De plus, on a en particulier que $p_0 = 1$ et que $q_0 = -\nu^2$, de sorte que

$$F(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 + (1 - 1)r - \nu^2 = r^2 - \nu^2. \tag{3.21}$$

Les racines de ce polynôme sont donc $r_1 = -\nu$ et $r_2 = \nu$. On peut ainsi chercher une solution de la forme

$$y(x) = x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

avec relation de récurrence

$$a_n F(n + \nu) = -\sum_{k=0}^{n-1} (p_{n-k}(k + \nu) + q_{n-k})a_k = q_2 a_{n-2} = a_{n-2}, \tag{3.22}$$

ce qui donne

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{F(n+\nu)} = \frac{-a_{n-2}}{(n+\nu)^2 - \nu^2} = \frac{-a_{n-2}}{n^2 + 2\nu n + \nu^2 - \nu^2} = \frac{-a_{n-2}}{n^2 + 2\nu n} = \frac{-a_{n-2}}{n(n+2\nu)},$$

c'est-à-dire que

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n+2\nu)}. \tag{3.23}$$

Pour $n = 1$, on a en fait que

$$a_1 F(1+\nu) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_3 = 0 \quad \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \quad a_{2k+1} = 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$$

Il n'y a donc que des termes pairs dans l'expansion et on calcule que

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n+2\nu)} = \frac{(-1)^2 a_{2n-4}}{2n(2n+2\nu)(2n-2)(2n-2+2\nu)} \\ &= \cdots = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n(n+\nu)(n-1)(n-1+\nu)\cdots(1)(1+\nu)} \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(n+\nu)(n-1+\nu)\cdots(1+\nu)} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! \prod_{k=1}^n (k+\nu)}. \end{aligned}$$

Pour $\nu \geq 0$, on pose donc

$$J_\nu(x) := \frac{x^\nu}{2^\nu \nu!} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! \prod_{k=1}^n (k+\nu)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}, \tag{3.24}$$

avec $\nu! := \Gamma(\nu+1)$, où

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-ts} dt \quad \text{pour } s > 0 \tag{3.25}$$

est la **fonction gamma**.

Exercice 3.6. En intégrant par parties, montrer que

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{3.26}$$

pour tout $s > 0$, ce qui justifie la deuxième égalité dans (3.24). Comme

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1,$$

conclure que pour $n \in \mathbb{N}_0$, on a que $\Gamma(n+1) = n!$.

La fonction J_ν est appelée la **fonction de Bessel de première espèce à l'ordre** ν.

Exemple 3.7.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad \text{et} \quad J_1(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

Si $r_2 - r_1 = \nu - (-\nu) = 2\nu \notin \mathbb{N}_0$, on peut chercher une autre solution de la forme

$$y_2 = x^{-\nu} \sum_{n=0}^\infty b_n x^n.$$

Pour obtenir les coefficients, il suffit en fait de remplacer ν par $-\nu$ dans le calcul précédent, ce qui donne

$$y_2(x) = x^{-\nu} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! \prod_{k=1}^n (k-\nu)} \tag{3.27}$$

comme solution.

Exercice 3.8. Montrer que

$$\lim_{s\to 0+} \Gamma(s) = +\infty.$$

Montrer toutefois que pour $-s \notin \mathbb{N}_0$, on peut étendre la définition de la fonction gamma de sorte que la relation (3.26) soit préservée. On peut donc définir plus généralement $s! = \Gamma(s+1)$ pour $-(s+1) \notin \mathbb{N}_0$.

Si $2\nu \notin \mathbb{Z}$, cela suggère de poser aussi

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}, \tag{3.28}$$

de sorte que la solution générale soit de la forme

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Lorsque $\nu = 0$, on n'a qu'une seule racine. Pour trouver une autre solution, on peut utiliser la méthode de d'Alembert. Cherchons donc une solution de la forme

$$y_2(x) = vJ_0(x)$$

avec v une fonction à déterminer. Dans ce cas, on calcule que

$$y_2'(x) = v'J_0 + vJ_0' \quad \text{et} \quad y_2''(x) = v''J_0 + 2v'J_0 + vJ_0'',$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
x^2y_2'' + xy_2' + x^2y_2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x^2(v''J_0 + 2v'J_0' + vJ_0'') + x(v'J_0 + vJ_0') + x^2vJ_0 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (x^2J_0)v'' + (2x^2J_0' + xJ_0)v' + (x^2J_0'' + xJ_0' + x^2J_0)v = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (x^2J_0)v'' + (2x^2J_0' + xJ_0)v' = 0, \ \text{ car } x^2J_0'' + xJ_0' + x^2J_0 = 0, \\
&\Longrightarrow \quad v'' = -\frac{2x^2J_0' + xJ_0}{x^2J_0}v' \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dv'}{v'} = \int \left(-\frac{2J_0'}{J_0} - \frac{1}{x}\right) dx \\
&\Longrightarrow \quad \ln|v'| = -2\ln|J_0'| - \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad |v'| = \frac{e^C}{|xJ_0^2|}, \\
&\Longrightarrow \quad v' = \frac{K}{xJ_0^2}, \quad K \in \mathbb{R}, \\
&\Longrightarrow \quad v = \int \frac{K}{xJ_0^2} dx.
\end{aligned}$$

Comme $J_0(0) = 1 \neq 0$ et J_0 est une fonction paire, la fonction $\frac{1}{J_0(x)^2}$ est analytique près de $x = 0$ et paire, donc

$$\frac{1}{J_0^2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} x^{2n}$$

avec $b_0 = 1$. Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{K}{xJ_0^2} dx = K \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} x^{2n-1} \right) dx \\ &= K b_0 \ln x + K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{2n} x^{2n} + C, \quad C \in \mathbb{R},\ x > 0. \end{aligned}$$

Sans essayer de calculer les coefficients, cela nous dit déjà, en prenant $C = 0$ et $K = 1$, qu'on a une deuxième solution de la forme

$$y_2(x) = v(x) J_0(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} x^{2n}.$$

Comme $J_0(0) = 1$, on voit en particulier que $\lim_{x \to 0+} y_2(x) = -\infty$, donc cette deuxième solution n'est pas bornée près de $x = 0$.

Si $2\nu = k \in \mathbb{Z}$ est un entier impair k, la fonction (3.28) reste bien définie. En fait, dans ce cas, pour $r = -\nu$ et $n = 2\nu$ la relation de récurrence (3.22) avec ν remplacé par $-\nu$ donne

$$a_k F(k - \nu) = a_k F(\nu) = -a_{k-2} = 0 \tag{3.30}$$

si $k \geq 3$, car alors $a_1 = a_3 = \cdots = a_{k-2} = 0$, et

$$a_k F(k - \nu) = 0 \tag{3.31}$$

si $k = 1$. Dans les deux cas, les termes de droite et de gauche sont nuls peu importe le choix de a_k. En prenant $a_k = 0$, on obtient alors que $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. La relation de récurrence pour les termes pairs montre alors que $J_{-\nu}$ est bien une solution de l'équation.

Enfin, si $2\nu \in \mathbb{Z}$ est un entier pair, c'est-à-dire si $\nu \in \mathbb{N}_0$, la méthode de Frobenius ne donne qu'une solution $J_\nu(x)$. Comme dans le cas $\nu = 0$, on peut utiliser la méthode de d'Alembert pour montrer que

$$J_\nu \int \frac{dx}{x J_\nu^2(x)}$$

est une autre solution, qui avec J_ν forme un ensemble fondamental de solutions.

3.4 Exercices

1. Trouver les points ordinaires et les points singuliers réguliers des équations différentielles suivantes :
   (a) (équation de Legendre) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
   (b) $xy'' + (\cos x)y' + 3xy = 0$;
   (c) $(\sin x)^2 y'' + xy' + y = 0$;
   (d) $(x - 4)^2 y'' + 3y = 0$.

2. Soit l'équation de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Si $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une solution analytique de l'équation près de $x = 0$, montrer que les coefficients satisfont à la relation de récurrence

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha - n)(\alpha + n + 1)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

(b) Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, montrer que l'équation de Legendre possède une solution polynomiale.

(c) Trouver des solutions polynomiales explicites lorsque $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. Soit l'équation différentielle $y'' - xy = 0$.
   (a) Si $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une solution analytique de l'équation près de $x = 0$, trouver la relation de récurrence satisfaite par les coefficients a_n et montrer que nécessairement $a_2 = 0$.
   (b) Trouver la solution générale de l'équation sous forme de séries entières.

4. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $(x-1)^2 y'' - 2y(x) = 0$.

5. Supposons que $x_0 = 0$ soit un point singulier régulier de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0.$$

Si les racines $r_1 \leq r_2$ de l'équation indicielle sont telles que $r_2 - r_1 \notin \mathbb{Z}$, montrer que les deux solutions

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad b_0 \neq 0,$$

obtenues par la méthode de Frobenius sont linéairement indépendantes. Indice : *Que pourrait-on dire de la limite* $\lim_{x \to 0+} \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ *si les fonctions étaient linéairement dépendantes ?*

6. Soit l'équation différentielle $x^2 y'' + xy' + (x-2)y = 0$.
   (a) Montrer que $x = 0$ est un point singulier régulier de l'équation et déterminer son équation indicielle.
   (b) Trouver la solution générale de l'équation en utilisant la méthode de Frobenius.

7. Soit l'équation de Bessel d'ordre $\frac{1}{2}$: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$.
   (a) Vérifier que $y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ est une solution de l'équation (en fait, on peut montrer que $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$.)

(b) Utiliser la méthode de d'Alembert pour trouver la solution générale de l'équation.

8. Trouver la solution générale de l'équation $x^2y'' + 7xy' + 10y = 0$ pour $x > 0$.

9. Soit l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$.
   (a) Montrer que $x = 0$ est un point singulier régulier de l'équation et déterminer l'équation indicielle correspondante.
   (b) Utiliser la méthode de Frobenius pour trouver la solution générale de l'équation pour $x > 0$.

10. Utiliser la méthode de Frobenius pour trouver une solution non triviale à l'équation

$$x^2y'' - 3xy' + (4x + 4)y = 0$$

pour $x > 0$.

4 Systèmes d'équations différentielles ordinaires

Un système d'équations différentielles ordinaires est un ensemble d'équations différentielles ordinaires impliquant plusieurs fonctions dépendant d'une même variable. L'ordre du système est l'ordre de la dérivée la plus grande. Par exemple, en mécanique classique, les équations du mouvement donnent lieu à des systèmes d'ordre 2.

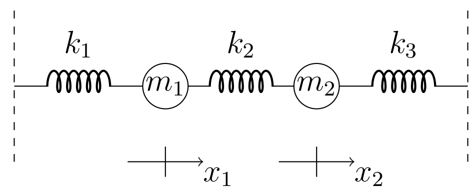


Figure 15 – Masses attachées à des ressorts

Exemple 4.1. Considérons le système de deux masses m_1 et m_2 attachées à des ressorts de constantes de Hooke k_1, k_2 et k_2 tel qu'illustré à la Figure 15. Si on suppose que le système est à l'équilibre lorsque les variables x_1 et x_2 sont égales à zéro et que la friction de l'air est négligeable, alors par la deuxième loi de Newton et la loi de Hooke, les équations du mouvement sont données par

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Comme les deux équations font intervenir les deux fonctions x_1 et x_2, elles sont entremêlées. En considérant la fonction à valeurs vectorielles

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

le système d'équations (4.1) peut être mis sous la forme plus compacte

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathbf{A}\vec{x} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

En général, si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre k est un système d'équations de la forme

$$\vec{F}(t, \vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, \ldots, \frac{d^k\vec{x}}{dt^k}) = 0 \tag{4.3}$$

pour une certaine fonction $\vec{F}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Le système d'équation (4.3) est dit **linéaire** si la fonction $\vec{F}$ est linéaire en $\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, \ldots, \frac{d^k\vec{x}}{dt^k}$. Autrement, on dit que le système est **non linéaire**. Dans l'Exemple 4.1, le système d'équations est linéaire.

4.1 Systèmes d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1

Quitte à augmenter le nombre d'équations, on peut toujours transformer un système d'équations d'ordre k comme (4.3) en un système d'ordre 1. En effet, en introduisant les nouvelles variables

$$\vec{w}_1 := \frac{d\vec{x}}{dt}, \cdots, \vec{w}_{k-1} := \frac{d^{k-1}\vec{x}}{dt^{k-1}},$$

le système (4.3) correspond au système d'ordre 1 donné par les équations

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{x}}{dt} &= w_1, \\
\frac{d\vec{w}_1}{dt} &= w_2, \\
&\vdots \\
\frac{d\vec{w}_{k-2}}{dt} &= \vec{w}_{k-1}, \\
\vec{F}(t, \vec{x}, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{k-1}, \frac{d\vec{w}_{k-1}}{dt}) &= 0.
\end{aligned}$$

Exemple 4.2. En introduisant les nouvelles fonctions $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$ et $v_2 = \frac{dx_2}{dt}$, le système d'ordre 2 de l'Exemple 4.1 se ramène au système d'ordre 1

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= v_1 \\
\frac{dx_2}{dt} &= v_2, \\
m_1 \frac{dv_1}{dt} &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\
m_2 \frac{dv_2}{dt} &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Puisqu'il est toujours possible de se ramener à un système d'ordre 1, nous allons pour l'instant nous concentrer sur ce cas. Plus spécifiquement, considérons un système d'ordre 1 de la forme

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{x}), \tag{4.5}$$

où $\vec{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = (F_1(t, \vec{x}), \cdots, F_n(t, \vec{x}))$$

est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec F_j une fonction à valeurs réelles pour $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 4.3. Dans la terminologie du cours de Calcul des formes différentielles (MAT2410), pour t fixé, $\vec{F}(t, \cdot)$ peut être vu comme un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. La fonction $\vec{F}$ peut donc être vue comme un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ variant avec le temps.

Par analogie avec les équations différentielles d'ordre 1, on s'attend à ce que, pour des conditions appropriées, le problème aux conditions initiales

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \tag{4.6}$$

possède une unique solution. Le théorème qui suit sera démontré dans le cours de Théorie des équations différentielles ordinaires (MAT3190).

Théorème 4.4. *Si les fonctions* $F_1, \ldots, F_n$ *et* $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ *pour* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *sont continues dans une région* $\mathcal{R}$ *de la forme*

$$\mathcal{R} = \{(t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \alpha < t < \beta,\ \alpha_1 < x_1 < \beta_1, \ldots, \alpha_n < x_n < \beta_n\}$$

et si $(t_0, \vec{x}_0)$ *appartient à* $\mathcal{R}$*, alors le problèmes aux conditions initiales* (4.6) *possède une unique solution* $\vec{x}(t)$ *avec* $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$*.*

Lorsque le système (4.5) est linéaire, les fonctions F_j sont linéaires en $\vec{x}$,

$$F_j(t, x_1, \ldots, x_n) = a_{j1}(t)x_1 + \cdots + a_{jn}(t)x_n + g_j(t),$$

ce qui fait qu'en notation matricielle, le système prend la forme

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

On dit qu'un tel système linéaire est **homogène** si $\vec{g}(t) = 0$. Autrement, on dit qu'il est **non homogène**. Dans ce cadre, le Théorème 4.7 prend la forme suivante.

Corollaire 4.5. *Si les fonctions à valeurs matricielles et vectorielles* $\mathbf{A}(t)$ *et* $\vec{g}(t)$ *sont continues sur un intervalles ouvert* $\mathcal{I}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $t_0 \in \mathcal{I}$*, alors le problème aux conditions initiales*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,$$

possède une unique solution dans l'intervalle $\mathcal{I}$*.*

Supposons maintenant que le système linéaire (4.7) est homogène, donc $\vec{g}(t) = 0$, et que la fonction $\mathbf{A}$ est constante en t, c'est-à-dire que $\mathbf{A}$ est une matrice. Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale, remarquons que le système peut être résolu facilement, puisqu'il suffit alors de résoudre n équations différentielles linéaires d'ordre 1 impliquant chacune une seule variable,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1,\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{nn}x_n.\end{aligned}$$

En utilisant la méthode des facteurs intégrants, on trouve que $x_j(t) = C_j e^{a_{jj}t}$ avec C_j une constante. Cependant, si $\mathbf{A}$ n'est pas diagonale, le système

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} \tag{4.8}$$

entremêle les variables. Peut-on faire un changement de variable, par exemple à travers un changement de base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, de sorte que dans les nouvelles coordonnées, le système d'équations différentielles linéaire (4.8) soit décrit par une matrice diagonale ? En s'appuyant sur le cours d'Algèbre Linéaire I (MAT1250), la réponse est souvent affirmative : il suffit lorsque c'est possible de choisir une base constituée de vecteurs propres de la matrice.

Définition 4.6. On dit qu'un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ est un **vecteur propre** d'une matrice $n \times n$ $\mathbf{A}$ avec **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{C}$ si $\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$. On dit que λ est une **valeur propre** de $\mathbf{A}$ s'il existe un vecteur propre non nul $\vec{v}$ tel que $\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$. On dénote par $\mathrm{Spec}(\mathbf{A})$ l'ensemble des valeurs propres de $\mathbf{A}$.

Exemple 4.7. Si

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale, alors la base canonique $\{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base de vecteurs propres de $\mathbf{\Lambda}$ avec $\mathbf{\Lambda}\vec{e_j} = \lambda_j\vec{e_j}$.

En général, pour trouver les vecteurs propres non nuls d'une matrice $\mathbf{A}$, on remarque que

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id})\vec{v} = 0, \quad \vec{v} \neq 0\\ &\Longrightarrow \quad \ker(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}\\ &\Longleftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ si et seulement si $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0$.

Définition 4.8. Le polynôme $P(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id})$ est le **polynôme caractéristique** de la matrice $\mathbf{A}$. C'est un polynôme de degré n si $\mathbf{A}$ est une matrice $n \times n$.

Exemple 4.9. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

ce qui montre que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ sont les deux valeurs propres de $\mathbf{A}$. Quels sont les vecteurs propres correspondants ? D'abord, on a que

$$\mathbf{A}\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \quad\Longrightarrow\quad (\mathbf{A}-\lambda_1)\vec{v}_1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad \text{avec } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} -u+v &= 0 \\ u-v &= 0 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad u = v.$$

Cela montre que $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou un de ses multiples est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ avec valeur propre $\lambda_1 = 1$. De même, pour la valeur propre $\lambda_2 = -1$, on calcule que

$$\mathbf{A}\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \quad\Longrightarrow\quad (\mathbf{A}-\lambda_2\vec{v}_2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad \text{avec } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} u+v &= 0 \\ u+v &= 0 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad u = -v.$$

Cela montre que $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ou un de ses multiples est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ avec valeur propre $\lambda_2 = -1$. Clairement, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont linéairement indépendants, donc forment une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, la matrice $\mathbf{A}$ correspond à la matrice diagonale

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effet, le changement de base de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ vers la base standard est implémenté par la matrice

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{car} \quad c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \mathbf{U}\vec{c}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

de sorte qu'on a la relation $\mathbf{U\Lambda U}^{-1} = \mathbf{A}$ ou $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU}$. En écrivant $\vec{x}(t) = c_1(t)\vec{v}_1 + c_2(t)\vec{v}_2$, il est maintenant facile de résoudre l'équation $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$, puisque

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} \quad &\Longrightarrow \quad c_1'\vec{v}_1 + c_2'\vec{v}_2 = \mathbf{A}(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = c_1\mathbf{A}\vec{v}_1 + c_2\mathbf{A}\vec{v}_2 = c_1\vec{v}_1 - c_2\vec{v}_2 \\
&\Longrightarrow \quad \begin{aligned} c_1' &= c_1 \\ c_2' &= -c_2 \end{aligned} \quad \text{car} \quad \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ est une base,} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{aligned} c_1(t) &= K_1 e^t \\ c_2(t) &= K_2 e^{-t} \end{aligned} \qquad \text{avec } K_1, K_2 \in \mathbb{R}, \\
&\Longrightarrow \quad \vec{x}(t) = K_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + K_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1e^t + K_2e^{-t} \\ K_1e^t - K_2e^{-t} \end{pmatrix}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Remarquons que si $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$, alors on a l'équivalence

$$\begin{aligned} c_1' &= c_1 \\ c_2' &= -c_2 \end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{d\vec{c}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\vec{c},$$

donc on peut aussi résoudre le système avec $\mathbf{\Lambda}$ et appliquer la matrice $\mathbf{U}$ aux solutions pour obtenir la solution générale du système avec la matrice $\mathbf{A}$:

$$\vec{x}(t) = \mathbf{U} \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ K_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 e^t + K_2 e^{-t} \\ K_1 e^t - K_2 e^{-t} \end{pmatrix}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

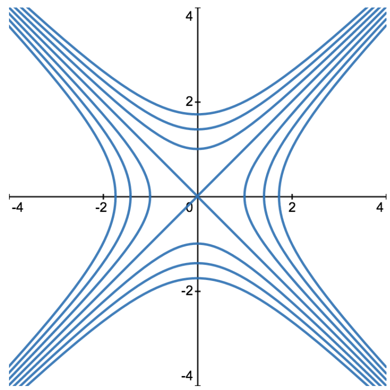


FIGURE 16 – Trajectoires de solutions du système de l'Exemple 4.9 dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4.10. Considérons le système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$? On calcule que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \operatorname{Id}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

donc les valeurs propres sont les racines $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$ du polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$. Trouvons les vecteurs propres correspondant. Pour $\lambda_1 = i$, on calcule que

$$(\mathbf{A} - i \operatorname{Id}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} -iu + v = 0 \\ -u - iv = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad v = iu.$$

Cela montre que $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ou un de ses multiples est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ avec valeur propre i. Puisque $\mathbf{A}$ est une matrice à entrées réelles, pour λ_2, au lieu de répéter le même calcul, on peut simplement remarquer que

$$\mathbf{A}\vec{v}_1 = i\vec{v}_1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}\overline{\vec{v}_1} = -i\overline{\vec{v}_1}.$$

On peut donc prendre $\vec{v}_2$ comme étant le conjugué complexe de $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la solution générale à valeurs complexes est donc

$$\vec{x}(t) = K_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + K_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}.$$

Pour obtenir des solutions réelles, remarquons que les solutions particulières

$$\vec{x}_1(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}_2(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

sont des conjuguées complexes l'une de l'autre. On peut donc prendre les parties réelles et imaginaires de $\vec{x}_1$ pour obtenir des solutions réels. Or, comme on a que

$$\vec{x}_1(t) = (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

on trouve que

$$\vec{u}(t) := \operatorname{Re} \vec{x}_1(t) = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}(t) := \operatorname{Im} \vec{x}_1(t) = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{2i} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

sont des solutions réelles. On peut donc écrire la solution générale réelle comme suit :

$$\vec{x}(t) = K_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

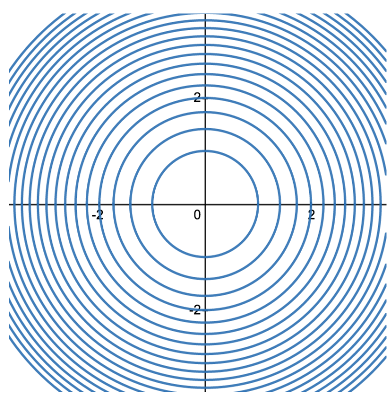


FIGURE 17 – Trajectoires de solutions du système de l'Exemple 4.10 dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Remarque 4.11. En général, si $\mathbf{A}$ est une matrice $n \times n$ ayant seulement des entrées réelles, alors ses valeurs propres complexes qui ne sont pas réelles apparaissent en paires conjuguées :

$$\lambda \in \operatorname{Spec}(\mathbf{A}) \iff \overline{\lambda} \in \operatorname{Spec}(\mathbf{A}).$$

C'est parce que les valeurs propres correspondent aux racines du polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$, un polynôme à coefficients réels lorsque $\mathbf{A}$ est une matrice réelle. De même, comme dans l'Exemple 4.10, les vecteurs propres correspondants sont conjugués complexes l'un de l'autre. On peut donc prendre leurs parties réelles et imaginaires pour obtenir des solutions réelles.

4.2 Principe de superposition pour les systèmes linéaires

Comme pour les équations différentielles ordinaires linéaires homogènes, les systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires homogènes admettent un principe du superposition.

Proposition 4.12 (Principe de superposition). *Si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont deux solutions du système d'équations différentielles linéaire homogène d'ordre 1*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t),$$

alors il en est de même pour toute combinaison linéaire $c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En effet, l'opérateur $\mathbf{L}$ défini par

$$\mathbf{L}\vec{x}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t) - \mathbf{A}(t)\vec{x}(t)$$

est linéaire, puisque

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) &= \frac{d}{dt}\left(c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2\right) - \mathbf{A}(t)[c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2] \\
&= c_1\frac{d\vec{x}_1}{dt} + c_2\frac{d\vec{x}_2}{dt} - c_1\mathbf{A}(t)\vec{x}_1(t) - c_2\mathbf{A}(t)\vec{x}_2(t) \\
&= c_1\mathbf{L}\vec{x}_1(t) + c_2\mathbf{L}\vec{x}_2(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont deux solutions, on a que $\mathbf{L}\vec{x}_1 = \mathbf{L}\vec{x}_2 = 0$, de sorte que

$$\mathbf{L}[c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t)] = c_1\mathbf{L}\vec{x}_1(t) + c_2\mathbf{L}\vec{x}_2(t) = c_1(0) + c_2(0) = 0,$$

ce qui montre que $c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t)$ est bien une solution pour toutes constantes c_1 et c_2. □

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est donc un espace vectoriel. Comme une solution $\vec{x}(t)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on s'attend à ce que l'espace des solutions soit de dimension n, puisqu'il faut imposer n conditions initiales, e.g. $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, pour spécifier une unique solution.

Définition 4.13. On dit que les fonctions $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sont **linéairement dépendantes** sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ s'il existe des constantes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ qui ne sont pas toutes nulles et telles que

$$c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Autrement, on dit qu'elles sont **linéairement indépendantes**.

Lorsqu'on a n fonctions $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on peut leur associer la fonction à valeurs matricielles

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{x}_1(t) & \cdots & \vec{x}_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

ayant pour colonnes $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$. On définit le **wronskien** de $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ par

$$W(t) = W(\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)) := \det\left(\mathbf{X}(t)\right).$$

Lemme 4.14. *S'il existe $t_0 \in \mathcal{I}$ tel que $W(t_0) \neq 0$, alors les fonctions $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathcal{I}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} W(t_0) \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0) \text{ sont des vecteurs linéairement indépendants} \\ &\Longrightarrow \quad c_1\vec{x}_1(t_0) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t_0) = 0 \text{ seulement si } c_1 = \cdots = c_n = 0, \\ &\Longrightarrow \quad c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t) = 0 \ \forall t \in \mathcal{I} \text{ seulement si } c_1 = \cdots = c_n = 0, \\ &\Longrightarrow \quad \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \text{ sont des fonctions linéairement indépendantes sur } \mathcal{I}. \end{aligned}$$

□

Théorème 4.15. *Soit $\mathbf{A}(t)$ une fonction continue à valeurs matricielles sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Si $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ sont des solutions linéairement indépendantes du système*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{x}$$

sur $\mathcal{I}$ avec $W(t_0) = W(\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)) \neq 0$ pour un certain $t_0 \in \mathcal{I}$, alors la solution générale de l'équation est donnée par

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t) \quad \textit{pour } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Puisque le système est linéaire homogène, toute combinaison linéaire de $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ est aussi une solution. Obtient-on toutes les solutions de cette façon ? Supposons que $\vec{\phi}(t)$ soit une solution. Considérons en particulier sa valeur $\vec{\phi}(t_0)$ en t_0. Puisque $W(t_0) \neq 0$, l'équation

$$\mathbf{X}(t_0)\vec{c} = \vec{\phi}(t_0) \quad \text{possède une unique solution} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Considérons alors la solution

$$\vec{\psi}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t).$$

Par construction, $\vec{\psi}(t_0) = \vec{\phi}(t_0)$, donc $\vec{\psi}$ et $\vec{\phi}$ satisfont aux mêmes conditions initiales. Par l'unicité de la solution stipulée par le Corollaire 4.5, on a donc que

$$\vec{\psi}(t) = \vec{\phi}(t) \ \forall t \in \mathcal{I} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\phi}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t).$$

Comme $\vec{\phi}$ était une solution quelconque, on en conclut que la solution générale est bien de la forme

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t) \quad \text{pour } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^n.$$

□

Comme pour les équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2, on a aussi le résultat suivant.

Théorème 4.16. *Soit $\mathbf{A}(t)$ une fonction continue à valeurs matricielles sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Si $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ sont des solutions du système linéaire homogène*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{x}$$

sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, alors soit $W(t) \equiv 0$ partout sur $\mathcal{I}$, soit $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathcal{I}$.

Démonstration. En utilisant la forme de Jordan d'une matrice (e.g. . la matrice diagonale associée lorsque la matrice est diagonale), on peut montrer que pour une fonction différentiable $\mathbf{A}(t)$ à valeurs dans les matrices inversibles,

$$\frac{d}{dt}\det(\mathbf{A}(t)) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}(t)^{-1}\frac{dA}{dt}\right)\det(\mathbf{A}(t)).$$

Pour le wronskien $W(t)$ des fonctions $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$, cela implique que si $W(t_0) \neq 0$ pour un certain $t_0 \in \mathcal{I}$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{dW(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\det(\mathbf{X}(t)) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{X}(t)^{-1}\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)\det(\mathbf{X}(t)) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\mathbf{X}(t)^{-1}\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)\right)\det(\mathbf{X}), \quad \text{car } \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) \\
&= \mathrm{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1})\det(\mathbf{X}), \quad \text{car } \mathrm{Tr}(\mathbf{C}\mathbf{D}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{D}\mathbf{C}), \\
&= \mathrm{Tr}(\mathbf{A}(t))W(t),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $W(t)$ est solution d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1. En appliquant la méthode des facteurs intégrants, sa solution est donc de la forme

$$W(t) = C\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}(\mathbf{A}(\tau))d\tau\right)$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}$. Comme $W(t_0) \neq 0$, il faut en fait que $C \neq 0$, donc que $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathcal{I}$. Cela donne bien la dichotomie souhaitée : soit $W(t) \equiv 0$ sur $\mathcal{I}$, soit $W(t)$ ne s'annule nulle par sur $\mathcal{I}$. □

Corollaire 4.17. *Soit $\mathbf{A}(t)$ une fonction continue à valeurs matricielles sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Si $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ sont des solutions du système linéaire homogène*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{x} \tag{4.10}$$

sur $\mathcal{I}$, alors elles sont linéairement dépendantes sur $\mathcal{I}$ si et seulement si leur wronskien s'annule identiquement sur $\mathcal{I}$.

Démonstration. $\Longrightarrow$) Cette implication est la contraposée du Lemme 4.14.

$\Longleftarrow$) Supposons que $W(t) = 0$ pour tout $t \in \mathcal{I}$. Pour $t_0 \in \mathcal{I}$ fixé, l'équation

$$c_1\vec{x}_1(t_0) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t_0) = 0$$

possède alors une solution non triviale $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Par le principe de superposition, la fonction

$$\vec{\phi}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots c_n\vec{x}_n(t)$$

est alors une solution du système (4.10) telle que $\vec{\phi}(t_0) = 0$. Par l'unicité de la solution découlant du Corollaire 4.5, la solution $\vec{\phi}$ correspond à la solution triviale, donc

$$0 = \vec{\phi}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots c_n\vec{x}_n(t) \quad \forall t \in \mathcal{I},$$

c'est-à-dire que les solutions $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ sont linéairement dépendantes. $\square$

4.3 La matrice fondamentale

Si $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ sont des solutions linéairement indépendantes du système

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{x} \tag{4.11}$$

sur un intervalle $\mathcal{I}$, alors la matrice

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

ayant pour colonnes $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ est une **matrice fondamentale** du système (4.11).

Exemple 4.18. Pour l'équation

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x},$$

on a vu que

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ cost \end{pmatrix}$$

sont des solutions. Leur wronskien est donné par

$$W(t) = W(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)) = \det \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0,$$

Par le Lemme 4.14, ces solutions sont donc linéairement indépendantes. La matrice fondamentale correspondante est

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

La matrice fondamentale permet de présenter la solution générale de l'équation sous une forme plus compacte :

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{\Psi}(t)\vec{c}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

La présentation (4.13) de la solution générale est valide plus généralement. Si $\mathbf{\Psi}(t)$ est une matrice fondamentale du système (4.11), alors la solution générale de ce système prend la forme

$$\vec{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\vec{c}, \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^n. \tag{4.14}$$

Si on cherche une solution $\vec{x}(t)$ satisfaisant à la condition initiale $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, on peut la déterminer comme suit à partir de (4.14). D'abord, en termes de la matrice fondamentale, on veut choisir $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0) = \mathbf{\Psi}(t_0)\vec{c}.$$

Or, $\det \mathbf{\Psi}(t_0) = W(\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)) \neq 0$ puisque les solutions sont linéairement indépendantes, donc $\mathbf{\Psi}(t_0)$ est une matrice inversible, ce qui implique que

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 = \vec{x}(t_0) = \mathbf{\Psi}(t_0)\vec{c} \quad &\Longrightarrow \quad \vec{c} = \mathbf{\Psi}(t_0)^{-1}\vec{x}_0 \\ &\Longrightarrow \quad \vec{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\vec{c} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}(t_0)^{-1}\vec{x}_0. \end{aligned}$$

Exemple 4.19. Pour le système

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x},$$

on a que

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{\Psi}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{\Psi}(0)^{-1},$$

donc dans ce cas,

$$\vec{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}(0)^{-1}\vec{x}_0 = \mathbf{\Psi}(t)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \vec{x}_0.$$

Comme $\Psi(t)$ est une rotation d'un angle $-t$, cela montre, en accord avec la Figure 17, que les trajectoires des solutions sont des cercles centrés à l'origine parcourus dans le sens horaire.

Puisque les colonnes d'une matrice fondamentale $\mathbf{\Psi}(t)$ du système linéaire homogène (4.11) sont des solutions de ce système, on a que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t).$$

Par analogie avec la méthode des facteurs intégrants pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, cela suggère formellement que $\mathbf{\Psi}(t)$ devrait correspondre à l'exponentielle de $\int \mathbf{A}(t)dt$. Est-ce que cela a véritablement un sens ? En particulier, si $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ ne dépend pas du temps, a-t-on

$$\mathbf{\Psi}(t) = C \exp(t\mathbf{A}), \quad C \in \mathbb{R}?$$

Pour répondre à cette question, il faut d'abord définir l'exponentielle d'une matrice. Pour ce faire, il suffit d'utiliser la série de Taylor de l'exponentielle et le fait que c'est une fonction analytique :

$$\exp(t\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{A})^k}{k!} = \mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} t^k. \tag{4.15}$$

On peut montrer que la série de droite converge peu importe $t \in \mathbb{R}$ et le choix de $\mathbf{A}$, donc l'exponentielle $\exp(t\mathbf{A})$ est bien définie. On peut aussi calculer sa dérivée en dérivant terme à terme dans la série :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\exp(t\mathbf{A}) &= \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}t^k\right) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{(k-1)!}t^{k-1} \\
&= \mathbf{A}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}\right) = \mathbf{A}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^m}{m!}t^m\right), \quad \text{en posant } m = k-1, \\
&= \mathbf{A}\exp(t\mathbf{A}).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

De plus, en $t = 0$, $\exp(0\mathbf{A}) = \mathrm{Id} + 0 = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire que $\exp(t\mathbf{A})$ donne la matrice identité ent $t = 0$. D'autre part, sans perte de généralité, on peut toujours choisir une matrice fondamentale

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{x}_1(t) & \cdots & \vec{x}_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

telle que $\{\vec{x}_1(0), \ldots, \vec{x}_n(0)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire telle que $\mathbf{\Psi}(0) = \mathrm{Id}$. Ainsi, pour ce choix, les fonctions à valeurs matricielles $\mathbf{\Psi}(t)$ et $\exp(t\mathbf{A})$ satisfont toutes deux au sytème avec conditions initiales

$$\frac{d\mathbf{\Phi}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t), \quad \mathbf{\Phi}(0) = \mathrm{Id}\,.$$

Par l'unicité de la solution stipulée par le Corollaire 4.5, il faut donc que

$$\mathbf{\Psi}(t) = \exp(t\mathbf{A}).$$

Si $\vec{x}(t)$ est une solution du système (4.11) telle que $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$, alors en termes de cette matrice fondamentale, on a que

$$\vec{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}(0)^{-1}\vec{x}_0 = \mathbf{\Psi}(t)\vec{x}_0 = \exp(t\mathbf{A})\vec{x}_0.$$

Remarque 4.20. Par contre, en général, si $\mathbf{A}(t)$ dépend du temps, alors

$$\exp\left(\int_0^t \mathbf{A}(\tau)d\tau\right) \tag{4.17}$$

n'est typiquement pas une matrice fondamentale. En fait, dans ce cas, il n'y a aucune raison pour que les matrices $\mathbf{A}(t)$ et $\int_0^t \mathbf{A}(\tau)d\tau$ commutent. Lorsqu'on calcule la dérivée de (4.17) en dérivant terme à terme dans la série de l'exponentielle et en appliquant la règle de la chaîne, l'argument de (4.16) ne fonctionne pas, ce qui fait qu'on obtient une expression plus compliquée qui n'est pas

$$\mathbf{A}(t)\exp\left(\int_0^t \mathbf{A}(\tau)d\tau\right).$$

En pratique, lorsque la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable, on peut calculer sont exponentielle à partir de la matrice diagonale associée. Si

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{X}$ est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de $\mathbf{A}$ engendrant une base de $\mathbb{R}^n$, alors l'exponentielle de $\mathbf{A}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\exp(\mathbf{A}) = \exp(\mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{X}^{-1}}{k!} \\
&= \mathbf{X}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{\Lambda}^k}{k!}\right)\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}\exp(\mathbf{\Lambda})\mathbf{X}^{-1} \\
&= \mathbf{X}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}\mathbf{X}^{-1}.
\end{aligned}$$

4.4 Valeurs propres complexes

En général, pour une matrice $n \times n$ à entrées réelles, les valeurs propres et les vecteurs propres apparaissent en paires conjuguées :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad &\Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{A}\vec{v}} = \overline{\lambda\vec{v}} \\
&\Longrightarrow \quad \mathbf{A}\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\overline{\vec{v}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right) = \frac{e^{\lambda t}\vec{v} + e^{\overline{\lambda}t}\overline{\vec{v}}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right) = \frac{e^{\lambda t}\vec{v} - e^{\overline{\lambda}t}\overline{\vec{v}}}{2i}$$

sont des solutions du sytème $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$.

Exemple 4.21. Trouvons la solution générale du système linéaire homogène $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$ est donné par

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 + 4,$$

donc

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0 \Longrightarrow \quad \lambda + 1 = \pm 2i \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1 \pm 2i.$$

Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ sont donc $\lambda_1 = -1+2i$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -1-2i$. Pour trouver un vecteur propre correspondant à λ_1, on calcule que

$$\begin{aligned}
0 = (\mathbf{A} - \lambda_1 \operatorname{Id})\vec{v} \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{aligned} -2iv_1 - 4v_2 &= 0 \\ v_1 - 2iv_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = 2iv_2 \\
&\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre avec valeur propre } \lambda_1 = -1+2i.
\end{aligned}$$

En prenant le conjugué complexe, on voit que

$$\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}}$$

est un vecteur propre avec valeur propre $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -1-2i$. On obtient deux solutions avec des entrées réelles en prenant les parties réelle et imaginaire de

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} &= e^{-t}(\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= e^{-t} \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + ie^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\vec{x}_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

sont deux solutions. Leur wronskien est donné par

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} e^{-t}(-2\sin(2t)) & 2e^{-t}\cos(2t) \\ e^{-t}(\cos(2t)) & e^{-t}\sin(2t) \end{pmatrix} = -2e^{-2t}(\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) = -2e^{-2t} \neq 0,$$

ce qui montre qu'elles sont linéairement indépendantes et que la solution générale est de la forme

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Les trajectoires des solutions sont en fait des spirales tournant dans le sens anti-horaire et s'approchant de l'origine.

Exemple 4.22. Considérons le système linéaire $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$ est donné par

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-3-\lambda)\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} + 2\det \begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (-3-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) + 2(-1-2(1+\lambda)) \\
&= -\lambda(\lambda^2+4\lambda+3) + 2(-1-2-2\lambda) \\
&= -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda - 6 - 4\lambda = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 6 \\
&= -(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda + 6) = -(\lambda+2)((\lambda+1)^2+2).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ sont donc $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1 + i\sqrt{2}$ et $\lambda_3 = -1 - i\sqrt{2}$. Trouvons les vecteurs propres correspondants. Pour λ_1, on veut que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda_1\,\mathrm{Id})\vec{v}_1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} -x+2z &=& 0 \\ x+y &=& 0 \\ -2x-y+2z &=& 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x &=& 2z \\ y &=& -x = -2z \end{array} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre de valeur propre } -2.
\end{aligned}$$

Pour λ_2, on a plutôt que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda_2\,\mathrm{Id})\vec{v}_2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2-i\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 1 & -i\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 & 1-i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \\
&\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -(2+i\sqrt{2})x + 2z &=& 0 \\ x - i\sqrt{2}y &=& 0 \\ -2x - y + (1-i\sqrt{2})z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& (1+i\frac{\sqrt{2}}{2})x \\ x &=& i\sqrt{2}y \\ z &=& (-1+i\sqrt{2})y \end{array} \right. \\
&\Longrightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1+i\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ est une vecteur propre de valeur propre } \lambda_2.
\end{aligned}$$

Son conjugué complexe

$$\vec{v}_3 = \overline{\vec{v}_2} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1-i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de valeur propre $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = -1 - i\sqrt{2}$. Une base de solutions est donc donnée par

$$\vec{x}_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}_2(t) &= \mathrm{Re}\left[e^{-t}(\cos\sqrt{2}t + i\sin\sqrt{2}t) \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 + i\sqrt{2} \end{pmatrix} \right] \\
&= e^{-t}\,\mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t \\ \cos\sqrt{2}t \\ -\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ \sin\sqrt{2}t \\ -\sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix} \right] \\
&= e^{-t} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t \\ \cos\sqrt{2}t \\ -\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et

$$\vec{x}_3(t) = \mathrm{Im}\left[e^{-t}(\cos\sqrt{2}t + i\sin\sqrt{2}t) \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 + i\sqrt{2} \end{pmatrix} \right] = e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ \sin\sqrt{2}t \\ -\sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}.$$

La solution générale est donc de la forme

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + c_3\vec{x}_3(t) \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

4.5 Valeurs propres répétées

On a vu comment résoudre le système $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$ lorsque $\vec{x}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{A}$ est une matrice ayant n valeurs propres distinctes. En effet, dans ce cas, la matrice est diagonalisable. En général toutefois, une matrice peut avoir moins de n valeurs propres distinctes. Dans ce cas, certaines valeurs propres sont répétées avec une multiplicité correspondant à la multiplicité de la racine dans le polynôme caractéristique. Malgré tout, la matrice peut demeurer diagonalisable. C'est le cas facile.

Exemple 4.23. Considérons le système linéaire $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

ce qui montre que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ avec λ_1 de multiplicité 2. Essayons de trouver des vecteurs propres. Pour $\lambda_1 = 1$, on a que

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} -y + z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad y = z \\
&\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre pour } x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

L'espace propre de $\lambda_1 = 1$, c'est-à-dire l'espace des vecteurs propres de valeur propre 1, est de dimension 2 et

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
$$

est une base de cet espace. Pour l'autre valeur propre $\lambda_2 = -1$, on calcule que

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A} + \mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2x & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & -y \end{array} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de valeur propre } -1.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$. La solution générale est donc donnée par

$$
\vec{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.
$$

Si plutôt la matrice en question n'est pas diagonalisable, alors il n'existe pas de base constituée de vecteurs propres. On ne peut donc pas complètement démêler les équations et il faut procéder autrement pour trouver la solution générale.

Exemple 4.24. Considérons l'équation du mouvement d'une masse attachée à un ressort dans le régime apériodique critique :

$$
\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0. \tag{4.18}
$$

Cette équation peut être convertie en un système d'ordre 1 en posant

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & y(t) \\ v(t) & = & \frac{dy}{dt}(t) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \frac{du}{dt} & = & v \\ \frac{dv}{dt} & = & -4u-4v \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}(t) \quad \text{avec } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}, \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractérisique de $\mathbf{A}$ est

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \, \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-4-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2,$$

ce qui montre que $\lambda_1 = -2$ est la seule valeur propre. Elle est donc de multiplicité 2. Pour trouver l'espace propre associé, on calcule que

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \, \mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 0 \\ -4x_1 - 2x_2 & = & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -2x_1$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de valeur propre } -2.$$

L'espace propre est donc de dimension 1 et la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable. On obtient quand même une solution

$$\vec{x}_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la solution $y_1(t) = e^{-2t}$ de l'équation différentielle (4.18). Cela suggère de chercher une deuxième solution de la forme

$$\vec{x}(t) = \vec{\xi} t e^{-2t} + \vec{\eta} e^{-2t}.$$

Pour que ce soit une solution, il faut que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\xi} e^{-2t} - 2\vec{\xi} t e^{-2t} - 2\vec{\eta} e^{-2t} = \mathbf{A}\vec{x}(t) = t e^{-2t} \mathbf{A}\vec{\xi} + e^{-2t} \mathbf{A}\vec{\eta},$$

c'est-à-dire que

$$t e^{-2t} [-2\vec{\xi}] + e^{-2t} [\vec{\xi} - 2\vec{\eta}] = t e^{-2t} \mathbf{A}\vec{\xi} + e^{-2t} \mathbf{A}\vec{\eta}.$$

En regardant les coefficients de te^{-2t}, il faut en particulier que

$$\mathbf{A}\vec{\xi} = -2\vec{\xi} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\xi} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En regardant d'autre part les coefficients de e^{-2t}, il faut que

$$\mathbf{A}\vec{\eta} = \vec{\xi} - 2\vec{\eta}.$$

Si on choisit $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, il faut alors que

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+2)\vec{\eta} = \vec{\xi} \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2\eta_1 + \eta_2 &=& 1 \\ -4\eta_1 - 2\eta_2 &=& -2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \eta_2 = 1 - 2\eta_1.\end{aligned}$$

En prenant $\eta_1 = 0$, cela donne $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de sorte que

$$\vec{x}_2(t) = te^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une solution. Elle correspond en fait à la solution $y_2(t) = te^{-2t}$ de l'équation (4.18). La solution générale est donc de la forme

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2\left[te^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Dans l'exemple précédent, remarquons que le vecteur $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de $\mathbf{A}$, mais c'est un **vecteur propre généralisé** au sens où

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \operatorname{Id})^2\vec{\eta} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \operatorname{Id})\vec{\xi} = 0$$

avec valeur propre généralisée $\lambda_1 = -2$. En termes de la base $\{\vec{\xi}, \vec{\eta}\}$, on a que

$$\mathbf{A}\vec{\xi} = -2\vec{\xi} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\vec{\eta} = \vec{\xi} - 2\vec{\eta}.$$

Ainsi, en utilisant la matrice

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ayant pour colonnes $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$, on a donc que

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

qui n'est autre que la forme de Jordan de la matrice $\mathbf{A}$.

Plus généralement, si $\vec{\eta}$ est un vecteur propre généralisé d'une matrice n par n $\mathbf{A}$ au sens où

$$(\mathbf{A} - \lambda \operatorname{Id})^k\vec{\eta} = 0$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et pour une certaine valeur propre généralisée $\lambda \in \mathbb{C}$, alors en supposant que

$$(\mathbf{A} - \lambda \operatorname{Id})^{k-1}\vec{\eta} \neq 0,$$

on peut chercher une solution du système

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} \tag{4.19}$$

de la forme

$$\vec{x}(t) = \left(\vec{\eta} + \sum_{q=1}^{k-1} t^q \vec{\xi}_q\right) e^{\lambda t}.$$

On calcule que

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{dt} &= \lambda\vec{x}(t) + \left(\sum_{q=1}^{k-1} qt^{q-1}\vec{\xi}_q\right) e^{\lambda t} = e^{\lambda t}\left[\lambda\vec{\eta} + \sum_{q=1}^{k-1} \lambda t^q \vec{\xi}_q + \sum_{q=1}^{k-1} qt^{q-1}\vec{\xi}_q\right] \\ &= e^{\lambda t}\left[(\lambda\vec{\eta} + \vec{\xi}_1) + \sum_{q=1}^{k-2}(\lambda t^q \vec{\xi}_q + (q+1)t^q\vec{\xi}_{q+1}) + \lambda t^{k-1}\vec{\xi}_{k-1}\right]\end{aligned}$$

et que

$$\mathbf{A}\vec{x} = e^{\lambda t}\left[\mathbf{A}\vec{\eta} + \sum_{q=1}^{k-1} t^q \mathbf{A}\vec{\xi}_q\right].$$

En insérant dans (4.19) et en regardant les coefficients devant $e^{\lambda t}t^q$ pour $q \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, on obtient que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} \lambda\vec{\eta} + \vec{\xi}_1 = \mathbf{A}\vec{\eta} & \Longrightarrow & (\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id})\vec{\eta} = \vec{\xi}_1 \\ \lambda\vec{\xi}_1 + 2\vec{\xi}_2 = \mathbf{A}\vec{\xi}_1 & \Longrightarrow & (\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id})\vec{\xi}_1 = 2\vec{\xi}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\vec{\xi}_q + (q+1)\vec{\xi}_{q+1} = \mathbf{A}\vec{\xi}_q & \Longrightarrow & (\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id})\vec{\xi}_q = (q+1)\vec{\xi}_{q+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\vec{\xi}_{k-1} = \mathbf{A}\vec{\xi}_{k-1} & \Longrightarrow & \vec{\xi}_{k-1}\text{est un vecteur propre.} \end{array}\right.$$

En prenant $\vec{\xi}_{k-1} = \dfrac{(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id})^{k-1}}{(k-1)!}\vec{\eta}$, on voit donc que

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\left[\vec{\eta} + \sum_{q=1}^{k-1} \frac{t^q(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id})^q}{q!}\vec{\eta}\right] = e^{\lambda t}e^{t(\mathbf{A}-\lambda\,\mathrm{Id})}\vec{\eta} \tag{4.20}$$

est une solution de l'équation. Comme toute matrice possède une forme de Jordan, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ constitué de vecteurs propres généralisés de $\mathbf{A}$. On peut donc obtenir une base de solutions du système d'équation différentielle en prenant des solutions de la forme (4.20).

4.6 Systèmes linéaires non homogènes

Considérons maintenant un système linéaire non homogène

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}(t) \tag{4.21}$$

avec $\mathbf{A}$ une matrice n par n. Supposons que $\mathbf{A}$ soit diagonalisable et soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ une base de vecteurs propres. La matrice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

ayant pour colonnes $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ est telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1} \quad \text{avec } \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où λ_j est la valeur propre du vecteur propre $\vec{v}_j$. Comme dans le cas homogène, on peut faire le changement de variable $\vec{x} = \mathbf{X}\vec{y}$, de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}(t) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\mathbf{X}\vec{y} = \mathbf{A}\mathbf{X}\vec{y} + \vec{g}(t) \\ &\Longrightarrow \quad \mathbf{X}\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}\vec{y} + \vec{g}(t) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}\vec{y} + \mathbf{X}^{-1}\vec{g}(t) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\vec{y} + \vec{h}(t), \quad \text{où } \vec{h}(t) = \mathbf{X}^{-1}\vec{g}(t). \end{aligned}$$

Sous cette forme, les équations sont démêlées,

$$\begin{aligned} \tfrac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + h_1(t), \\ &\vdots \\ \tfrac{dy_n}{dt} &= \lambda_n y_n + h_n(t). \end{aligned}$$

On peut donc résoudre chacune d'elles séparément, par exemple en utilisant la méthode des facteurs intégrants.

Exemple 4.25. On considère le système linéaire non homogène

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

On a vu dans l'Exemple 4.9 que $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de vecteurs propres de $\mathbf{A}$, donc on peut prendre

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{X}^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en termes de $\vec{y}(t) = \mathbf{X}^{-1}\vec{x}(t)$, le système d'équations devient

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\vec{y} + \vec{h}(t), \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{h}(t) = \mathbf{X}^{-1}\vec{g}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il faut donc résoudre les équations

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 + e^{2t} \quad \text{et} \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_2.$$

On utilisant la méthode des facteurs intégrants du premier chapitre, on trouve les solutions

$$y_1(t) = e^{2t} + C_1 e^t, \quad y_2(t) = C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la solution générale est donnée par

$$\vec{x}(t) = \mathbf{X}\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} + C_1 e^t \\ C_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ e^{2t} + C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On peut aussi utiliser directement la méthode des coefficients indéterminés pour résoudre le système (4.21). Voici deux exemples.

Exemple 4.26. Pour trouver une solution du système

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A} + \vec{g}(t), \quad \text{toujours avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ mais cette fois avec } \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

on peut chercher une solution de la forme $\vec{x}(t) = e^{3t}\vec{w}$ avec $\vec{w}$ un vecteur constant. On calcule que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = 3e^{3t}\vec{w} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g} \quad &\Longrightarrow \quad 3e^{3t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 3w_1 & = & w_2 + 1 \\ 3w_2 & = & w_1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} w_1 & = & 3w_2 \\ 9w_2 & = & w_2 + 1 \end{array} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} w_1 & = & \frac{3}{8} \\ w_2 & = & \frac{1}{8} \end{array} \\
&\Longrightarrow \quad \vec{x}(t) = \frac{e^{3t}}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une solution particulière.}
\end{aligned}$$

La solution générale est donc donnée par

$$\vec{x}(t) = \frac{e^{3t}}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.27. On considère le système linéaire non homogène

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons une solution particulière de la forme

$$\vec{x}(t) = t\vec{v} + \vec{w}$$

avec $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs constants à déterminer. On calcule que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\vec{x}(t) = t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on voit que

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad & \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 - w_2 \\ v_2 - w_1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} v_2 + 1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} v_1 - w_2 & = & 0 \\ v_2 - w_1 & = & 0 \\ v_2 + 1 & = & 0 \\ v_1 & = & 0 \end{cases} \\
& \Longrightarrow \quad v_1 = w_2 = 0, \quad v_2 = w_1 = -1 \\
& \Longrightarrow \quad t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{est une solution particulière} \\
& \Longrightarrow \quad \vec{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\
& \qquad \text{est la solution générale.}
\end{aligned}$$

4.7 Variation de paramètres

Considérons le système linéaire non homogène

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t), \tag{4.22}$$

où la matrice $n \times n$ $\mathbf{A}(t)$ dépend possiblement du temps. Supposons que nous connaissions la solution générale du système homogène,

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t), \quad \vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t), \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}, \tag{4.23}$$

où $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ sont des solutions linéairement indépendantes sur un certain intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Alors on peut prendre comme matrice fondamentale

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{x}_1(t) & \cdots & \vec{x}_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Elle est telle que

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t).$$

Pour le système non homogène (4.22), on peut alors utiliser la méthode de variation des paramètres et rechercher une solution de la forme

$$\vec{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\vec{u}(t)$$

avec $\vec{u}(t)$ à déterminer. Dans ce cas, on a que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{\Psi}}{dt}\vec{u} + \mathbf{\Psi}\frac{d\vec{u}}{dt} = \mathbf{A\Psi}\vec{u} + \mathbf{\Psi}\vec{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\vec{x} + \vec{g}(t) = \mathbf{A\Psi}\vec{u} + \vec{g},$$

de sorte que si $\vec{x}(t)$ est une solution du système non homogène, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{A\Psi}\vec{u} + \mathbf{\Psi}\frac{d\vec{u}}{dt} = \mathbf{A\Psi}\vec{u} + \vec{g} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{\Psi}\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{g}(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\vec{g}(t) \\ &\Longrightarrow \quad \vec{u}(t) = \int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\vec{g}(t)dt. \end{aligned}$$

Exemple 4.28. Considérons le système linéaire non homogène

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par l'Exemple 4.9, on peut prendre comme matrice fondamentale du sytème homogène

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{\Psi}(t)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en cherchant une solution particulière du système non homogène de la forme $\vec{x} = \mathbf{\Psi}\vec{u}$, on trouve que

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) = \int \mathbf{\Psi}(t)^{-1}\vec{g}(t)dt &= \frac{1}{2}\int \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2}\int \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2t} \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t \\ \frac{e^{2t}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La solution générale est donc donnée par

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\vec{u}(t) &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{t}{2} + C_1 \\ \frac{e^{2t}}{4} + C_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{t}{2} + C_1\right)\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4.8 Exercices

1. Transformer l'équation $y''' - 2y'' + 3y' - y = \sin t$ en un système d'équations différentielles d'ordre 1.

2. Soit $\mathbf{A}$ une matrice $n \times n$ diagonalisable ayant pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.

   (a) Montrer que son déterminant est donné par le produit de ses valeurs propres :
   $$\det(\mathbf{A}) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

   (b) Montrer que sa trace $\operatorname{Tr} \mathbf{A} := \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$, qui correspond à la somme des entrées sur la diagonale, est donnée par la somme des valeurs propres de $\mathbf{A}$:
   $$\operatorname{Tr} \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$
   Indice : Montrer d'abord que $\operatorname{Tr}(\mathbf{BC}) = \operatorname{Tr}(\mathbf{CB})$ *pour* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *deux matrices* $n \times n$ *quelconques.*

3. Trouver la solution générale du système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$ avec $\mathbf{A}$ comme suit :

   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

   (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

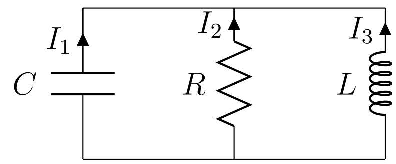
   (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;

   (d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Donner un exemple de deux fonctions $\vec{x}_1(t)$ et $\vec{x}_2(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$, mais dont le wronskien s'annule identiquement sur $\mathbb{R}$. *Indice : Le numéro 1c de la Section 2.11 pourrait être une source d'inspiration.*

5. Soit $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n. Si $y_1, \ldots, y_n$ sont n solutions de cette équation, tenter de donner une définition de leur wronskien en ramenant cette équation à un système d'équations différentielles d'ordre 1.

6. On considère le circuit électrique suivant :



Dénotons aussi par V_1, V_2 et V_3 les chutes de tensions dans le condensateur, la résistance et l'inducteur respectivement.

(a) En applicant la deuxième loi de Kirchhoff dans la maille de gauche, montrer que $V_1 = V_2$. De même, montrer que $V_2 = V_3$.

(b) En applicant la première loi de Kirchhoff à l'un des noeuds du circuit, montrer que $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

(c) Utiliser la relation entre la chute de tension et le courant pour chaque éléments du circuit afin de montrer que

$$CV_1' = I_1, \quad V_2 = RI_2, \quad LI_3' = V_3.$$

(d) Utiliser les équations des étapes précédentes pour éliminer V_2, V_3 et I_1, I_2 et obtenir le système d'équations linéaires

$$CV_1' = -I_3 - \frac{V_1}{R}, \quad LI_3' = V_1.$$

(e) Trouver la solution générale de cette équation si $R = 1\Omega$, $C = 1F$ et $L = 1H$.

7. Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique $n \times n$ avec entrées réelles, c'est-à-dire telle que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, où $\mathbf{A}^T$ est la matrice transposée de $\mathbf{A}$.

(a) Montrer que pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, on a que $\overline{\overline{\mathbf{w}}^T A \mathbf{w}} = \overline{\mathbf{w}}^T A \mathbf{w}$.

(b) Si $\mathbf{w}$ est une vecteur propre de $\mathbf{A}$ avec valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que $\lambda = \overline{\lambda}$, et donc qu'en fait λ est nécessairement réelle.

(c) Si $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ sont des vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés à des valeurs propres distinctes, montrer que $\mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2 = 0$, c'est-à-dire que $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ sont orthogonaux.

(d) En procédant par induction sur n, montrer qu'une matrice symétrique (à entrées réelles) est toujours diagonalisable.

8. Trouver la solution générale de l'équation $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$ si

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Trouver la solution générale des systèmes d'équations linéaires non homogènes suivants :
   (a) $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$;
   (b) $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$;
   (c) $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$, pour $t > 0$.

10. Soit l'équation $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$
    (a) Si $\vec{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{dx}{dt}(t) \end{pmatrix}$, trouver une matrice $\mathbf{A}$ telle que $\dfrac{d\vec{\mathbf{y}}}{dt} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}$.
    (b) Trouver les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
    (c) Pour chaque valeur propre, trouver un vecteur propre correspondant.
    (d) Donner une formule explicite pour $e^{t\mathbf{A}}$.

11. On considère le système d'équations différentielles

$$\frac{d\vec{\mathbf{y}}}{dt} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    (a) Trouver trois solutions linéairement indépendantes de la forme $\vec{\mathbf{y}}(t) = e^{\lambda t}\vec{\mathbf{v}}$ où $\vec{\mathbf{v}}$ est un vecteur constant.
    (b) Trouver l'unique solution $\vec{\mathbf{y}}(t)$ telle que $\vec{\mathbf{y}}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

12. Les positions de deux masses attachées à des ressorts satisfont au système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2x_1 + x_2,$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = x_1 - 2x_2.$$

    Trouver la solution générale de ce système d'équations.

5 Équations aux dérivées partielles linéaires

Dans ce dernier chapitre, nous allons étudier certaines équations aux dérivées partielles linéaires en utilisant les séries de Fourier.

5.1 Séries de Fourier

Dans une tige de métal homogène de longueur L telle qu'illustrée, la température peut varier avec le temps t, mais aussi en fonction de la position x sur la tige. Si les deux extrémités

FIGURE 18 – Tige de métal de longueur L

de la tiges sont maintenues à une température fixe $T_0 = 0$, alors la température dans la tige $T(x,t)$, vue comme une fonction de la position x dans la tige et du temps t, satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = 0 \ \forall t,$$

où $\alpha > 0$ est une constante propre au métal constituant la tige. C'est l'équation de la chaleur, aussi appelée équation de la diffusion puisqu'elle sert aussi à modéliser la diffusion d'une substance dans un milieu. Pour résoudre cette équation, l'idée de Fourier consiste à considérer l'opérateur différentiel

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

communément appelé le **laplacien**, comme une application linéaire agissant sur un espace de dimension infini et de tenter de la diagonaliser. D'abord, pour φ, ψ des fonctions intégrables sur l'intervalle $[-L, L]$, on définit le «produit scalaire»

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} := \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \varphi(x)\psi(x)dx. \tag{5.1}$$

Lemme 5.1. *Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ des fonctions différentiables périodiques de période $2L$ dont la deuxième dérivée existe et est continue, on a que*

$$\langle \varphi, \Delta\psi \rangle_{L^2} = \langle \Delta\varphi, \psi \rangle_{L^2}.$$

Démonstration. Il suffit d'intégrer par parties deux fois :

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \Delta\psi\rangle_{L^2} &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \varphi(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx = -\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \varphi(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\Big|_{x=-L}^{x=L} \\
&= -\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + 0, \quad \text{car } \varphi \text{ et } \frac{\partial\psi}{\partial x} \text{ sont périodiques de période } 2L, \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x}\psi(x)dx = \langle \Delta\varphi, \psi\rangle_{L^2}, \quad \text{en intégrant par parties à nouveau.}
\end{aligned}$$

□

En d'autres termes, par rapport au «produit scalaire» (5.1), l'opérateur Δ est symétrique. Par analogie avec le cas des matrices symétriques agissant sur $\mathbb{R}^n$ et le numéro 1 du TP10, on est amené à spéculer que les valeurs propres de l'opérateur Δ sont réelles et que les fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes sont orthogonales par rapport au «produit scalaire» (5.1). C'est effectivement le cas et la même stratégie fonctionne pour le démontrer.

Proposition 5.2. *Soit φ une fonction à valeurs complexes qui est périodique de période $2L$ et dont la deuxième dérivée existe et est continue. Si la fonction φ n'est pas identiquement nulle et telle que $\Delta\varphi = \lambda\varphi$, alors $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour des fonctions à valeurs complexes, on peut étendre le «produit scalaire» (5.1) en un «produit hermitien»

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{L^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx.$$

De ce point de vue, pour φ et λ comme dans l'énoncé, on a que

$$\begin{aligned}
(\lambda - \overline{\lambda})\langle \varphi, \varphi\rangle_{L^2} &= \langle \lambda\varphi, \varphi\rangle_{L^2} - \langle \varphi, \lambda\varphi\rangle_{L^2} = \langle \Delta\varphi, \varphi\rangle_{L^2} - \langle \varphi, \Delta\varphi\rangle_{L^2} \\
&= 0 \quad \text{par le Lemme 5.2,}
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda = \overline{\lambda}$, puisque $\langle \varphi, \varphi\rangle_{L^2} \neq 0$. Il faut donc que $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposition 5.3. *Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ des fonctions périodiques de période $2L$ dont la deuxième dérivée existe et est continue. Si φ et ψ sont des fonctions propres de l'opérateur Δ de valeurs propres distinctes, alors*

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{L^2} = 0.$$

Démonstration. Supposons que $\Delta\varphi = \lambda_1\varphi$ et $\Delta\psi = \lambda_2\psi$ pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Par la proposition précédente, λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles, donc

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \varphi, \psi\rangle_{L^2} &= \langle \lambda_1\varphi, \psi\rangle_{L^2} - \langle \varphi, \lambda_2\psi\rangle_{L^2} \\
&= \langle \Delta\varphi, \psi\rangle_{L^2} - \langle \varphi, \Delta\psi\rangle_{L^2} = 0 \quad \text{par le Lemme 5.1,}
\end{aligned}$$

donc $\langle \varphi, \psi\rangle_{L^2} = 0$ puisque $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. □

Ces prémisses nous amènent à espérer qu'il soit possible aussi de diagonaliser l'opérateur Δ.

Définition 5.4. Une suite de fonctions intégrables $\{\varphi_n\}$ est un **système orthogonal** de fonctions sur $[-L, L]$ si

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad \text{dès que} \quad m \neq n.$$

Le système est **orthonormal** si de plus on a que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \varphi_n(x)^2 dx = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_{L^2} = 1 \quad \forall n.$$

Proposition 5.5. *Lest fonctions* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *forment un système orthonormal sur* $[-L, L]$*. Ce sont aussi des fonctions propres du laplacien au sens où* $\Delta(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ *et*

$$\Delta \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \Delta \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Démonstration. Un calcul simple montre les fonctions en question sont bien des fonctions propres du laplacien comme spécifié en (5.2). Par la Proposition 5.3, on a donc que pour $m \neq n$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\ 0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\ 0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

De même, on a que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

Enfin, on a que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 dx = \frac{2L}{2L} = 1,$$

alors que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \frac{1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)}{2} dx, \quad \text{car} \quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}, \\ &= \frac{1}{2L} \left[x + \frac{L}{2\pi n} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right] \Bigg|_{x=-L}^{x=L} = \frac{2L}{2L} = 1 \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)}{2}dx, \quad \text{car} \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2},$$
$$= \frac{1}{2L}\left[x - \frac{L}{2\pi n}\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]\Bigg|_{x=-L}^{x=L} = \frac{2L}{2L} = 1.$$

On a donc bien affaire à un système orthonormal. □

Poursuivant l'analogie avec les matrices symétriques n par n, on est amené à se demander si le système orthonormal de la Proposition 5.5 forme une base. Évidemment, une réponse à cette question n'est pas simplement oui ou non. Il faut aussi spécifier l'espace de fonctions sur $[-L, L]$ que l'on veut considérer (intégrables, de carré intégrable, continues, différentiables, etc.) et dans quel sens le système orthonormal en serait une base. En fait, l'une des réponses les plus satisfaisantes fait intervenir les notions d'espace d'Hilbert et de fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue. Ces notions étant trop avancées pour ce cours, on se contentera plutôt d'une réponse partielle, mais malgré tout suffisante pour résoudre plusieurs types d'équations aux dérivées partielles intéressantes.

Définition 5.6. Soit f une fonction périodique de période $2L$ localement intégrable au sens de Riemann. Alors sa **série de Fourier** associée est la série de fonctions

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &:= \langle f, \cos\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)\rangle_{L^2} = \tfrac{1}{L}\textstyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)dx, \\ b_n &:= \langle f, \sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)\rangle_{L^2} = \tfrac{1}{L}\textstyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)dx. \end{aligned}$$

Au lieu de se demander si le système orthonormal de la Proposition 5.5 est une base, on se posera la question sous-jacente de savoir si la série de Fourier d'une fonction f converge vers la valeur de cette fonction. Voici le cadre où on pourra apporter une réponse à cette question.

Définition 5.7. Une fonction f sur $[-L, L]$ est continue par morceaux si f est continue sauf en un nombre fini de points où la fonction a possiblement un saut. De plus, f est **différentiable par morceaux** si f' est continue par morceaux et pour tout x,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x^+)}{h} = \lim_{h\to 0^+} f'(x+h), \quad \text{où } f(x^+) = \lim_{h\to 0^+} f(x+h),$$
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x^-)}{h} = \lim_{h\to 0^-} f'(x+h), \quad \text{où } f(x^-) = \lim_{h\to 0^-} f(x+h).$$

Le résultat suivant est démontré dans le cours d'Analyse II (MAT2150).

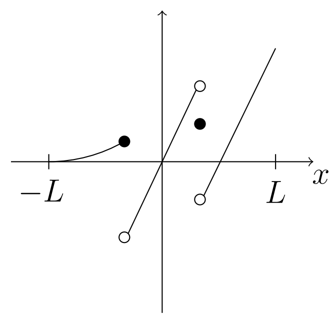


FIGURE 19 – Exemple d'un graphe d'une fonction différentiable par morceaux

Théorème 5.8. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $2L$ qui est différentiable par morceaux sur tout intervalle fermé. Alors pour $x \in \mathbb{R}$, sa série de Fourier converge vers*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}.$$

Corollaire 5.9. *Si f est une fonction périodique de période $2L$ qui est différentiable par morceaux et continue, alors sa série de Fourier converge vers f.*

Exemple 5.10. Considérons la fonction

$$f(x) := \begin{cases} -1, & -L < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq L,\ x = -L, \end{cases}$$

qu'on peut étendre à tout $\mathbb{R}$ en une fonction périodique de période $2L$.

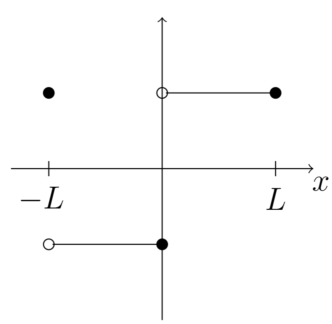


FIGURE 20 – Graphe de la fonction f

Les coefficients de sa série de Fourier sont donnés par

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{1}{L} \int_{-L}^{0} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{1}{L} \int_{0}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{1}{L} \frac{L}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg|_{x=-L}^{x=0} + \frac{1}{L} \frac{L}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=L} \\ &= 0, \quad \text{car } \sin(k\pi) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{1}{L}\int_{-L}^{0}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{0}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad \text{car } \sin(-x)=\sin(x),\\
&= \frac{2}{L}\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\Big|_{x=0}^{x=L} = -\frac{2}{n\pi}[(-1)^n-1] = \frac{2}{n\pi}[1-(-1^n)].
\end{aligned}$$

Autrement dit, $b_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}$ et $b_{2n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}_0$, donc la série de Fourier de f est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right).$$

Par le Théoèrme 5.8, on a donc que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) = \begin{cases} -1, & -L < x < 0,\\ 1, & 0 < x < L,\\ 0, & x = 0, -L, L.\end{cases}$$

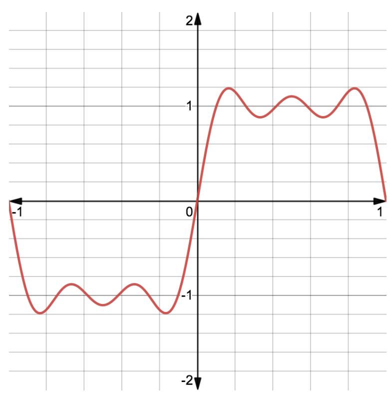


FIGURE 21 – Graphe de la somme des trois premiers termes de la série de Fourier de f de l'Exemple 5.10 lorsque $L = 1$

Dans l'exemple précédent, beaucoup de coefficients de la série de Fourier s'annulent, ce qui peut être vu sans calcul en utilisant la parité de la fonction.

Définition 5.11. Une fonction f est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout x dans le domaine $\mathrm{dom}(f)$ de la fonction et $x \in \mathrm{dom}(f) \iff -x \in \mathrm{dom}(f)$. De même, une fonction f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x dans le domaine de la fonction et $x \in \mathrm{dom}(f) \iff -x \in \mathrm{dom}(f)$.

Exemple 5.12. Les fonctions $\cos x$, $\cosh x$ et x^{2n} pour $n \in \mathbb{N}_0$ sont des fonctions paires, alors que les fonctions $\sin x$, $\sinh x$ et x^{2n+1} pour $n \in \mathbb{N}_0$ sont des fonctions impaires.

Voici quelques observations simples et utiles concernant les fonctions paires et impaires :

1. Si f est impaire et $0 \in \text{dom}(f)$, alors $f(0) = 0$, car
$$f(0) = f(-0) = -f(0) \implies 2f(0) = 0 \implies f(0) = 0;$$
2. Si f et g sont paires (respectivement impaires), alors $f+g$ est paire (respectivement impaire) ;
3. Si f et g sont paires, alors fg est paire ;
4. Si f et g sont impaires, alors fg est paire ;
5. Si f est paire et g est impaire, alors fg est impaire ;
6. Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$ lorsque l'intégrale est définie ;
7. Si f est paire, $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_0^L f(x)dx$ lorsque l'intégrale est définie ;
8. En général, une fonction sur un domaine symétrique est une combinaison d'une fonction paire et d'une fonction impaire,
$$f = f_p + f_i \quad \text{avec} \quad f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

En particulier, en utilisant ces observations, on voit que la série de Fourier d'une fonction paire ne contient que des cosinus et la fonction constante, alors que la série de Fourier d'une fonction impaire ne contient que des sinus.

Exemple 5.13. Considérons la fonction périodique de période $2L$ telle que $f(x) = -x$ pour $x \in (-L, L]$. Comme la fonction f est impaire sur l'intervalle ouvert $(-L, L)$, on a que $a_n = 0$

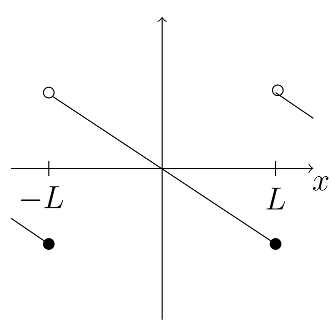


Figure 22 – Graphe de la fonction f

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ dans sa série de Fourier. De plus, on calcule que

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{2}{L}\int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\
&= -\frac{2}{L}\left[uv|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L vdu\right], \quad \text{en intégrant par parties avec } u = x, v = -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\
&= -\frac{2}{L}\left[-\frac{xL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)|_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right] \\
&= -\frac{2}{L}\left[-\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) + 0 + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)|_{x=0}^{x=L}\right] = \frac{2L}{n\pi}(-1)^n.
\end{aligned}$$

Par le Théorème 5.8, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^n}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \begin{cases} -x, & x \in (-L, L), \\ 0, & x = L. \end{cases}$$

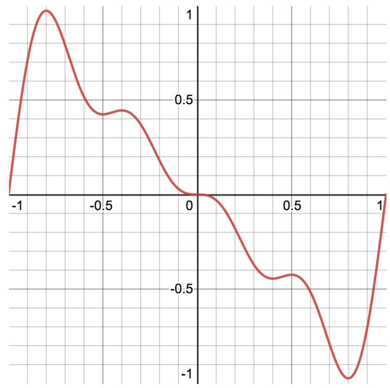


FIGURE 23 – Graphe de la somme des quatre premiers termes de la série de Fourier de f de l'Exemple 5.13 lorsque $L = 1$

5.2 Équation de la chaleur

Considérons l'équation de la chaleur le long d'une tige de métal dont les extrémités sont maintenues à la température $T = 0$,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = 0 \ \forall t. \tag{5.3}$$

Cherchons d'abord une solution de la forme $T(x,t) = f(x)g(t)$ avec f ne dépendant que de x, g ne dépendant que de t et$f(0) = f(L) = 0$ pour satisfaire les conditions aux bords. Avec ces hypothèses, il est possible de séparer les variables :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad & \Longrightarrow \quad f(x)\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \alpha^2 g(t) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \\ & \Longrightarrow \quad \frac{g'(t)}{\alpha^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}, \quad \text{pourvu que } g(t) \neq 0, f(x) \neq 0, \\ & \Longrightarrow \quad \frac{g'(t)}{\alpha^2 g(t)} = \lambda = \frac{f''(x)}{f(x)} \quad \text{pour une certaine constante } \lambda, \end{aligned}$$

car le terme de gauche ne dépend que de t, alors que le terme de droite ne dépend que de x. Il faut donc que

$$f''(x) = \lambda f(x) \quad \text{et} \quad g'(t) = \lambda \alpha^2 g(t).$$

Pour f, cherchons une solution de la forme $f(x) = e^{rx}$. L'équation caractéristique correspondante est

$$r^2 = \lambda.$$

Si $\lambda > 0$, alors $r = \pm\sqrt{\lambda}$ et la solution générale est

$$f(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Or, la condition $f(0) = 0$ impose que $C_1 = -C_2$, de sorte que si on suppose que $C_1 \neq 0$ pour avoir une solution non triviale, alors

$$f(x) = C_1(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}(e^{2\sqrt{\lambda}x} - 1) \neq 0 \quad \forall x \neq 0,$$

ce qui signifie que la condition $f(L) = 0$ ne peut être satisfaite que si $C_1 = 0$. Il n'y a donc pas de solution non triviale satisfaisant aux conditions aux bords. Cependant, si $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$, alors l'équation caractéristique est

$$\begin{aligned} r^2 = -\nu^2 \quad &\implies \quad r = \pm i\nu \\ &\implies \quad f(x) = C_1 \sin(\nu x) + C_2 \cos(\nu x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \text{est la solution générale.} \end{aligned}$$

La condition $f(0) = 0$ impose que $C_2 = 0$. Si $C_1 \neq 0$, la condition $f(L) = 0$ impose alors que

$$\sin(\nu L) = 0 \quad \implies \quad \nu L = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \implies \quad \lambda = -\alpha^2 \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

On peut maintenant résoudre $g'(t) = \lambda\alpha^2 g(t)$ pour $\lambda = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$, ce qui donne

$$g(t) = K e^{-\alpha^2\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

En somme, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(x,t) = e^{-\alpha^2\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

est une solution non triviale de l'équation de la chaleur (5.3). Lorsque $t = 0$, on retrouve précisément les fonctions sinus apparaissant dans une série de Fourier. Pour résoudre l'équation (5.3) en général, cela suggère d'écrire la distribution initiale $T(x,0) = f(x)$ de température dans la tige en termes de sa série de Fourier. Plus précisément, on peut étendre $T(x,0)$ en une fonction impaire sur l'intervalle $[-L, L]$. Pour ce prolongement, dans la série de Fourier associée, on aura donc que $a_n = 0$ pour tout n et que

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

La discussion précédente et le principe de superposition suggère alors que la solution pour $t > 0$ est donnée par

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \tag{5.4}$$

Exemple 5.14. Trouvons $T(x,t)$ si en $t = 0$, la température $T(x,0) = T_0$ est constante dans la tige. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2T_0}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) dx = \frac{2T_0}{L}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=L} \\ &= -\frac{2T_0}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos(0)\right] = \frac{2T_0}{n\pi}[1 - (-1)^n]. \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \dfrac{4T_0}{(2n+1)\pi}$. La solution est donc

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4T_0}{(2n+1)\pi} e^{-\alpha^2\left(\frac{\pi(2n+1)}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \\ &\approx \frac{4T_0}{\pi} e^{-\frac{\alpha^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{pour } t \gg 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

En particulier, T décroît exponentiellement rapidement vers 0 lorsque $t \to +\infty$, ce qui est en accord avec la loi de refroidissement de Newton.

Dans l'exemple précédent, remarquons que la solution (5.5) n'a de sens que pour $t \geq 0$. Pour $t < 0$, la série diverge ! C'est une des propriétés de l'équation de la chaleur : il y a une «flèche du temps». En sachant les conditions initiales en $t = 0$, on peut prévoir ce qui adviendra, mais typiquement on ne peut pas déterminer ce qui est advenu auparavant.

Supposons maintenant que les extrémités de la tige sont maintenues à des températures différentes comme illustré. Les conditions aux bords deviennent alors :

FIGURE 24 – Tige de métal de longueur L

$$T(0,t) = T_1 \quad \text{et} \quad T(L,t) = T_2 \quad \forall t \geq 0. \tag{5.6}$$

Lorsque $t \to \infty$, on s'attend à ce que la solution $T(x,t)$ converge vers une solution stable $\tau(x)$ ne dépendant pas du temps. Or, $\tau(x)$ est une solution si

$$\alpha^2 \tau''(x) = \frac{\partial}{\partial t} \upsilon\tau(x) = 0, \quad \tau(0) = T_1, \quad \tau(L) = T_2.$$

Or,

$$\tau''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tau(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

et pour satisfaire les conditions aux bords, il faut que

$$\begin{aligned} T_1 = \tau(0) = b \quad T_2 = \tau(L) = aL + b \quad &\Longrightarrow \quad b = T_1 \quad \text{et} \quad a = \frac{T_2 - T_1}{L} \\ &\Longrightarrow \quad \tau(x) = \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x + T_1. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Pour résoudre l'équation de la chaleur avec les conditions (5.6), on peut utiliser la solution stable $\tau(x)$ pour se ramener à l'équation (5.3). En effet, il suffit de considérer la nouvelle fonction

$$w(x,t) = T(x,t) - \tau(x), \tag{5.8}$$

puisqu'alors

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T_1,\ T(L,t) = T_2 \quad \forall t \geq 0 \tag{5.9}$$

si et seulement si

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w(0,t) = w(L,t) \quad \forall t \geq 0. \tag{5.10}$$

Comme on sait déjà que (5.15) aura une solution de la forme

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{\alpha\pi n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

avec les coefficients b_n à déterminer en fonction de la distribution de température initiale, on en déduit que (5.9) aura une solution de la forme

$$T(x,t) = \left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{\alpha\pi n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Exemple 5.15. Résolvons l'équation (5.9) avec $T_1 = 20$ et $T_2 = 0$ si initialement

$$T(x,0) = 20 \quad \forall x \in [0,L].$$

Dans ce cas,

$$\tau(x) = -\frac{20}{L}x + 20 \quad \text{et} \quad w(x,0) = T(x,0) - \tau(x) = \frac{20}{L}x.$$

Ainsi, on a que

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\alpha^2 \frac{\pi n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

avec

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L w(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{40}{L^2}\int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{40}{L^2}\left[uv|_0^L - \int_0^L v\,du\right], \quad \text{en intégrant par parties avec } u = x,\ v = -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\
&= \frac{40}{L^2}\left[-\frac{xL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{-L}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right] \\
&= \frac{40}{L^2}\left[-\frac{L^2}{\pi n}\cos(n\pi) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L\right] \\
&= \frac{40}{L^2}\left[-\frac{L^2}{\pi n}(-1)^n + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 [\sin(n\pi) - \sin(0)]\right] \\
&= \frac{40}{L^2}\left[-\frac{L^2}{\pi n}(-1)^n + 0\right] = \frac{40(-1)^{n+1}}{n\pi}.
\end{aligned}$$

La solution est donc donnée par

$$T(x,t) = \tau(x) + w(x,t) = 20 - \frac{20}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40(-1)^{n+1}}{n\pi} e^{-\left(\alpha^2 \frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

On peut aussi considérer le cas où les extrémités de la tige sont isolées, de sorte qu'il n'y ait aucun échange de chaleur avec l'extérieur. Dans ce cas, les conditions aux bords deviennent plutôt

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0 \ \forall t > 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{5.11}$$

Pour trouver des solutions, on peut à nouveau appliquer la méthode de séparation des variables :

$$\begin{aligned} T(x,t) = f(x)g(t) \quad &\Longrightarrow \quad f(x)g'(t) = \alpha^2 f''(x)g(t) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{g'(t)}{\alpha^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ &\Longrightarrow \quad \begin{aligned} g'(t) &= \lambda\alpha^2 g(t) \\ f''(x) &= \lambda f(x). \end{aligned} \end{aligned}$$

Pourvu que $\lambda \neq 0$, la solution générale à valeurs complexes de la deuxième équation est

$$f(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = C_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - C_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Or, les conditions aux bords restreignent considérablement les solutions possibles, puisque si f n'est pas la solution triviale,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f'(0) = f'(L) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad C_1 = C_2 \neq 0, \\ &\Longrightarrow \quad \sqrt{\lambda} \notin \mathbb{R}, \text{ car sinon } f'(L) = 2C_1\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}L) \neq 0, \\ &\Longrightarrow \quad f(x) = C_1\cos(\omega x), \quad \text{avec } \omega = \sqrt{-\lambda} > 0, \quad \lambda < 0, \\ &\Longrightarrow \quad f'(x) = -C_1\omega\sin(\omega x), \quad 0 = f'(L) = -C_1\omega\sin(\omega L) \\ &\Longrightarrow \quad \omega L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow \quad \omega = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Si plutôt $\lambda = 0$, alors la solution générale est $f(x) = C_1 + C_2 x$ avec $f'(x) = C_2$, mais pour que les conditions aux bords soient satisfaites, il faut que $C_2 = 0$, c'est-à-dire qu'on peut aussi considérer le cas $\omega = \frac{n\pi}{L} = 0$ dans la situation précédente. Donc pour $n \in \mathbb{N}_0$ et $f(x) = C_1\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, l'équation correspondante pour $g(t)$ est

$$\begin{aligned} g'(t) = \lambda\alpha^2 g(t) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2 g(t) \quad &\Longrightarrow \quad g(t) = K_1 e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \\ &\Longrightarrow \quad T(x,t) = f(x)g(t) = C_1K_1 e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

En combinant toutes ces solutions, on s'attend donc à ce que la solution générale soit de la forme

$$T(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{5.12}$$

avec a_n les coefficients de la série de Fourier de la distribution de température initiale $T(x,0)$ prolongée en une fonction **paire** périodique de période $2L$:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L T(x,0)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Exemple 5.16. Si initialement $T(x,0) = \frac{20}{L}x$, alors pour $n > 0$, on calcule que

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{20}{L} x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{40}{L^2}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{40}{L^2}\left[uv|_0^L - \int_0^L vdu \right], \quad \text{en posant } u = x,\ v = \frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\
&= \frac{40}{L^2}\left[\frac{xL}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L - \frac{L}{n\pi}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\
&= \frac{40}{L^2}\left[0 - \frac{L}{n\pi}\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\Big|_0^L \right] = \frac{40}{L^2}\frac{L^2}{(n\pi)^2}[\cos(n\pi) - \cos(0)] \\
&= \frac{40}{(n\pi)^2}[(-1)^n - 1],
\end{aligned}$$

alors que pour $n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{20}{L} x dx = \frac{40}{L^2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = 20.$$

Ainsi, lorsque les extrémités de la tige sont isolées, la solution est donnée par

$$T(x,t) = 10 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{80}{(2n-1)^2\pi^2} e^{-\left(\frac{\alpha(2n-1)\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right). \tag{5.13}$$

Remarque 5.17. En évaluant (5.13) en $t = x = 0$ et en appliquant le Théorème 5.8, on obtient l'identité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5.3 L'équation des ondes

On considère une corde tendue entre les extrémités $x = 0$ et $x = L$. Soit $y(x,t)$ le déplacement vertical de la corde en x au temps t par rapport à la position d'équilibre. Alors

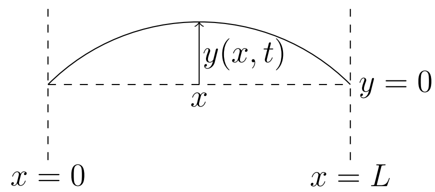


Figure 25 – corde tendue

cette fonction satisfait à l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \tag{5.14}$$

pour une certaine constante positive α dépendant du type de corde et de la tension dans la corde. La fonction $y(x,t)$ satisfait aussi aux conditions de Dirichlet aux extrémités de la corde :

$$y(0,t) = y(0,L) = 0 \quad \forall t. \tag{5.15}$$

Comme pour l'équation de la chaleur, on peut appliquer la méthode de séparation des variables en cherchant une solution de la forme

$$\begin{aligned} y(x,t) = f(x)g(t) \quad &\Longrightarrow \quad f(x)g''(t) = \alpha^2 f''(x)g(t) \\ &\Longrightarrow \quad \frac{g''(t)}{\alpha^2 g(t)} = \lambda = \frac{f''(x)}{f(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ &\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} g''(t) &=& \alpha^2 \lambda g(t), \\ f''(x) &=& \lambda f(x), \quad f(0) = f(L) = 0. \end{array} \end{aligned}$$

Pour la deuxième équation, on procède comme pour l'équation de la chaleur pour trouver que $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$ et que la solution non triviale correspondante est

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Pour la fonction g, l'équation à résoudre devient alors

$$g''(t) + \alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 g(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(t) = C_1 \cos\left(\frac{\alpha n\pi t}{L}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\alpha n\pi t}{L}\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

En combinant toutes ces solutions, on s'attend donc à ce que la solution générale soit de la forme

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\alpha n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{\alpha n\pi t}{L}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{5.16}$$

Pour déterminer les coefficients a_n, il suffit de regarder la position initiale de la corde :

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \Longrightarrow \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x,0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Pour déterminer les coefficients b_n, il faut plutôt regarder la fonction $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ en $t=0$. En effet, puisque

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha n\pi}{L}\left[-a_n \sin\left(\frac{\alpha n\pi t}{L}\right) + b_n \cos\left(\frac{\alpha n\pi t}{L}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

on voit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad &\Longrightarrow \quad \left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right) b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ &\Longrightarrow \quad b_n = \frac{2}{\alpha n\pi}\int_0^L \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.\end{aligned}$$

Exemple 5.18. Supposons qu'initialement, on pince la corde de sorte que

$$y(x,0) = \frac{L}{2} - \left|x - \frac{L}{2}\right|, \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Dans ce cas, les coefficients b_n sont automatiquement tous nuls. Pour les coefficients a_n, on

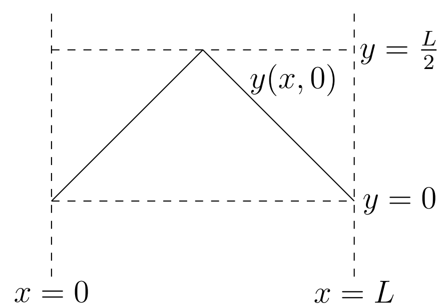


FIGURE 26 – corde pincée en $t=0$

calcule que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L y(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y(w+\frac{L}{2},0)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\left(w+\frac{L}{2}\right)\right)dw \quad \text{en posant } w = x - \frac{L}{2}, \\ &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y(w+\frac{L}{2},0)\sin\left(\frac{n\pi w}{L}+\frac{n\pi}{2}\right)dw. \end{aligned}$$

Comme

$$\sin\left(\frac{n\pi w}{L}+\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^m \sin\left(\frac{2m\pi w}{L}\right), & n = 2m, \\ (-1)^m \cos\left(\frac{(2m+1)\pi w}{L}\right), & n = 2m+1, \end{cases}$$

on voit que $a_{2m} = 0$, puisque dans ce cas on intègre une fonction impaire en w sur un domaine symétrique, alors que

$$\begin{aligned}
a_{2m+1} &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{L}{2} - |w|\right)(-1)^m \cos\left(\frac{(2m+1)\pi w}{L}\right) dw, \\
&= \frac{4(-1)^m}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{L}{2} - w\right)(-1)^m \cos\left(\frac{(2m+1)\pi w}{L}\right) dw, \quad \text{car l'intégrande est paire,} \\
&= \frac{4(-1)^m}{L}\left[uv|_0^{\frac{L}{2}} - \int_0^{\frac{L}{2}} vdu\right], \quad u = \left(\frac{L}{2} - w\right),\ v = \frac{L}{(2m+1)\pi}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi w}{L}\right), \\
&= \frac{4(-1)^m}{L}\left[\left(\frac{L}{2} - w\right)\frac{L}{(2m+1)\pi}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right)\Bigg|_0^{\frac{L}{2}}\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\left. + \frac{L}{(2m+1)\pi}\int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi w}{L}\right) dw\right] \\
&= \frac{4(-1)^m}{L}\left[0 - \left(\frac{L}{(2m+1)\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{(2m+1)\pi w}{L}\right)\Bigg|_0^{\frac{L}{2}}\right] \\
&= \frac{4(-1)^m}{L}\left[-\left(\frac{L}{(2m+1)\pi}\right)^2 \left(\cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right)\right] \\
&= \frac{4(-1)^m}{L}\left[-\left(\frac{L}{(2m+1)\pi}\right)^2 (0-1)\right] = \frac{4L(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

La solution à l'équation des ondes est donc dans ce cas

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4L(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{\alpha(2m+1)\pi t}{L}\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right) \\
&\approx \frac{4L}{\pi^2}\cos\left(\frac{\alpha\pi t}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Contrairement à ce qui se passe pour l'équation de la chaleur, la solution (5.17) converge et a aussi un sens pour $t < 0$. Cela correspond au fait que l'équation des ondes est symétrique par rapport à la réflexion $t \mapsto -t$. Remarquons aussi que la fréquence la plus basse des oscillations de la corde est

$$f_1 = \frac{\alpha}{2L}.$$

C'est la **fréquence fondamentale ou harmonique fondamentale** de la corde. Les autres fréquences d'oscillation ou harmoniques de la corde sont des multiples de cette fréquence fondamentale :

$$f_n = nf_1 = \frac{n\alpha}{2L}.$$

5.4 Équation de Laplace

Le potentiel électrique (respectivement gravitationnel) est une fonction $u(x, y, z)$ donnant le champ électrique (respectivement gravitationnel) :

$$\vec{E}(x,y,z) = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}. \tag{5.18}$$

D'autre part, la version infinitésimale de la loi de Gauss dit que la densité de charge (respectivement la densité de masse) est donnée par

$$\rho = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

En particulier, s'il n'y a aucune charge, on a que

$$0 = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

C'est **l'équation de Laplace** en trois dimensions :

$$\Delta u = 0, \quad \text{où } \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.19}$$

est le **Laplacien** en trois dimensions. En deux dimensions, l'équation est plutôt

$$\Delta u = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{5.20}$$

Considérons cette équation dans la région rectangulaire $[0, a] \times [0, b]$ avec des conditions aux bords tel qu'illustré. Il faut donc trouver une fonction u telle que

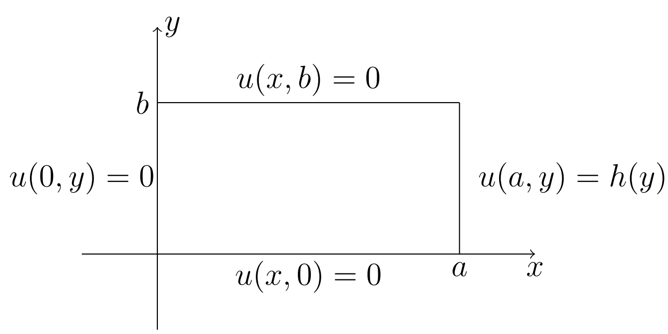


Figure 27 – Équation de Laplace sur un rectangle a par b

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) = 0,\ u(a,y) = h(y), \forall x \in [0,a],\ y \in [0,b],$$

où $h(y)$ est une fonction qu'on suppose donnée. Comme pour l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes, appliquons la méthode de séparation des variables en cherchant une solution de la forme

$$u(x, y) = f(x)g(y),$$

sans toutefois se soucier de la condition $u(a,y) = h(y)$ pour l'instant. Dans ce cas, on souhaite que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f''(x)g(y) = -f(x)g''(y) \\
&\Longrightarrow \quad \frac{f''(y)}{f(y)} = \lambda = -\frac{g''(y)}{g(y)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\
&\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} f''(x) & = & \lambda f(x) \\ g''(x) & = & -\lambda g(x). \end{array}
\end{aligned}$$

Pour la deuxième équation, on doit satisfaire les conditions aux bords $g(0) = g(b) = 0$, alors comme pour l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes, on peut montrer que la seule manière d'obtenir une solution non triviale est que $\lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$ et que

$$g(y) = C \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pour un tel choix de λ, l'équation pour f devient

$$f''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = C_1 e^{\frac{n\pi}{b}x} + C_2 e^{-\frac{n\pi}{b}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour que la condition au bord en $x = 0$ soit satisfaite, il faut aussi que

$$f(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = -C_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = C_1\left(e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right) = 2C_1 \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right).$$

Ainsi,

$$u_n(x,y) = \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

est une solution pour $n \in \mathbb{N}$. Pour pouvoir satisfaire à la condition au bord en $x = a$, on s'attend à ce que la solution générale soit une combinaison linéaire de ces solutions :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

En supposant qu'une telle solution satisfait à la condition au bord $u(a,y) = h(y)$, on obtient en évaluant en $x = a$ que

$$h(y) = u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

donc que

$$a_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^L h(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy.$$

Exemple 5.19. Si $h(y) = \dfrac{b}{2} - |y - \dfrac{b}{2}|$, alors par le calcul de l'Exemple 5.18, on a que $a_{2m} = 0 \; \forall m \in \mathbb{N}$ et que

$$a_{2m+1} \sinh\left(\frac{(2m+1)\pi a}{b}\right) = \frac{4b(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2}.$$

La solution est donc donnée par

$$u(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4b(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2 \sinh\left(\frac{(2m+1)\pi a}{b}\right)} \sinh\left(\frac{(2m+1)\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi y}{b}\right).$$

5.5 Exercices

1. On considère la fonction $f(x) = x(L-x)$ sur l'intervalle $[0, L]$.
   (a) Trouver des coefficients a_n tels que

   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad \forall x \in [0, L].$$

   (b) En évaluant l'expression précédente en $x = \frac{L}{2}$, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$.

   (c) On considère la fonction $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
      i. Montrer qu'on a l'identité

      $$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\cos(mx)}{\pi(m^2 - \frac{1}{4})} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

      Indice : L'identité $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ *pourrait être utile.*

      ii. Évaluer la somme $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1}$.

   (d) Résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur une tige de longueur L si la température est maintenue à 0 à chacune des extrémités et si au temps $t = 0$, la distribution de température est donnée par la fonction $f(x) = x(L-x)$.

2. L'idée que le système orthonormale $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\}_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ constituerait une base des fonctions de carré intégrable sur $[-L, L]$ peut être rendue rigoureuse. Une des conséquences importantes de ce résultat est l'identité de Parseval :

   $$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \varphi(x)^2 dx =: \langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

   où φ est une fonction de carré intégrable sur $[-L, L]$ et a_n, b_n sont les coefficients apparaissant dans sa série de Fourier. En quelque sorte, l'identité de Parseval donne deux manière de calculer la «longueur»

   $$\|\varphi\|_{L^2} := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2}}$$

   de la fonction φ par rapport au «produit scalaire» $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$.

(a) En utilisant le fait (non démontré dans ce cours) que

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\right\|_{L^2}=\|\varphi\|_{L^2},$$

établir l'identité de Parseval.

(b) Considérons la fonction périodique de période $2L$ définie par $f(x) = -x$ pour $x \in (-L, L]$ de l'Exemple 5.13. Utiliser l'identité de Parseval pour établir l'identité

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

3. Pour $t \geq 0$, soit $T(x,t)$ une solution lisse de l'équation de la chaleur sur une tige de longueur L maintenue à la température $T = 0$ à ses deux extrémités :

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\quad T(0,t)=T(L,t)=0\ \forall\ t\geq 0.$$

Considérons la fonctionnelle associée $F(t) := \displaystyle\int_0^L T(x,t)^2dx \geq 0$.

(a) Montrer que

$$F'(t)=-2\alpha^2\int_0^L\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2dx.$$

(b) En conclure que $F(t)$ est une quantité qui décroît avec le temps.

(c) Si T_1 et T_2 sont deux solutions lisses telles qu'initialement $T_1(x,0) = T_2(x,0)$ pour tout x, montrer qu'en fait $T_1 \equiv T_2$. *Indice : Quelle est la fonctionnelle $F(t)$ de la solution $T := T_1 - T_2$?*

4. Calculer les coefficients de la série de Fourier de la fonction périodique de période $2L$ définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in [-L, L]$. En déduire la valeur de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

5. Résoudre l'équation des ondes $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sur une corde vibrante de longueur L dont les extrémités sont fixées (c'est-à-dire que $y(0,t) = y(L,t) = 0$) si initialement

$$y(x,0)=x(L-x)\quad\text{et}\quad\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=x(L-x).$$

6. Résoudre l'équation de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ dans le rectangle $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b$ si les conditions au bord sont données par

$$u(0,y)=u(x,0)=u(x,b)=0 \quad \text{et} \quad u(a,y)=y(b-y) \quad \forall x,y.$$

7. Résoudre l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur une tige de longueur L si la température est maintenue à $T_1=0$ en $x=0$ et à $T_2=10$ en $x=L$ si la distribution initiale de température est donnée par la fonction $f(x)=\dfrac{10x^2}{L^2}$.

8. On considère l'équation des ondes $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\alpha^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sur une corde vibrante de longueur L dont l'extrémité en $x=0$ est fixée et l'extrémité en $x=L$ peut se mouvoir librement dans la direction verticale, de sorte que les conditions au bord sont

$$y(0,t)=0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(L,t)=0 \quad \forall t.$$

   (a) Trouver toutes les solutions de la forme $y(x,t)=f(x)g(t)$ pour f une fonction ne dépendant que de x et g une fonction ne dépendant que de t.
   (b) Résoudre l'équation si initialement $y(x,0)=L^2-x^2$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=0$.

9. Une corde de longueur L, tendue et maintenue fixe en ses deux extrémités vibre dans l'air. Dû à la friction de l'air, un nouveau terme s'ajoute à l'équation de la corde vibrante qui devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\gamma\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t)=u(L,t)=0\ \forall t,$$

   où $\gamma>0$ est une constante telle que $\gamma<\frac{2\pi\alpha}{L}$.
   (a) Trouver toutes les solutions de la forme $u(x,t)=X(x)T(t)$ avec T de la forme $T(t)=e^{-\frac{\gamma t}{2}}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)$.
   (b) Quelle est la solution si initialement $u(x,0)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-\sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)$?
   (c) Quelle est la solution si on garde les mêmes conditions initiales, mais qu'on a plutôt que $\gamma>\frac{2\pi\alpha}{L}$?

Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal
Courriel: rochon.frederic@uqam.ca