Séance de travaux pratiques I

Le lundi 18 janvier 2021

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 + 3x + 2\,;$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = x \sin x\,;$
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x} \ln x$ pour $x > 0\,;$
   (d) $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \sec^2 x$ pour $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\,;$
   (e) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - x^2}$ pour $x \in (-1, 1)\,;$
   (f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2 - 2x - 3}.$

2. L'équation différentielle satisfaite par la vitesse $v(t)$, où t est le temps, d'une goutte d'eau en chute libre est donnée

$$\frac{dv}{dt} = g - kv \tag{1}$$

   lorsque la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse.
   (a) Résoudre cette équation en utilisant la méthode des facteurs intégrants.
   (b) Montrer que peu importe la vitesse initiale, la vitesse de la goutte d'eau tend invariablement vers $\frac{g}{k}$ à mesure que le temps s'écoule.

3. L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

   est appelée équation de Bernoulli. Pour $n = 1$, c'est une équation linéaire.
   (a) Pour $n \neq 1$, montrer que le changement de variable $u = y^{1-n}$ ramène l'équation de Bernoulli à une équation linéaire.
   (b) Résoudre l'équation $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}y^2.$

4. On définit le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique par $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ respectivement. Établir les identités suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$

(b) $\dfrac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$;

(c) $\dfrac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$;

(d) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, où $\operatorname{arcsinh} x = \sinh^{-1} x$ est l'inverse (par rapport à la composition de fonctions) de la fonction sinus hyperbolique.