Séance de travaux pratiques X

Le lundi 12 avril 2021

1. Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique $n \times n$ avec entrées réelles, c'est-à-dire telle que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, où $\mathbf{A}^T$ est la matrice transposée de $\mathbf{A}$.
   (a) Montrer que pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, on a que $\overline{\overline{\mathbf{w}}^T A\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{w}}^T A\mathbf{w}$.
   (b) Si $\mathbf{w}$ est une vecteur propre de $\mathbf{A}$ avec valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que $\lambda = \overline{\lambda}$, et donc qu'en fait λ est nécessairement réelle.
   (c) Si $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ sont des vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés à des valeurs propres distinctes, montrer que $\mathbf{w}_1^T\mathbf{w}_2 = 0$, c'est-à-dire que $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ sont orthogonaux.
   (d) En procédant par induction sur n, montrer qu'une matrice symétrique (à entrées réelles) est toujours diagonalisable.

2. Trouver la solution générale de l'équation $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$ si
   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
   (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$;
   (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Trouver la solution générale des systèmes d'équations linéaires non homogènes suivants :
   (a) $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$;
   (b) $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$;
   (c) $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$, pour $t > 0$.

4. Pour l'espace des fonctions périodiques de période $2L > 0$ localement de carré intégrable, on peut définir le «produit scalaire» suivant :

$$\langle u, v\rangle := \int_{-L}^{L} u(x)v(x)dx. \tag{1}$$

   Montrer que les fonctions péirodiques de période $2L$ 1, $\cos\left(\dfrac{\pi mx}{L}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi mx}{L}\right)$ pour $m \in \mathbb{N}$ sont orthogonales par rapport à (1), c'est-à-dire qu'on a les identités suivantes pour tout $m, n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ L, & \text{si } m = n; \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ L, & \text{si } m = n; \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\cdot 1dx = \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\cdot 1dx = 0;$

(d) $\displaystyle\int_{-L}^{L} 1^2 dx = 2L.$

Indices : pour (a), utiliser l'identité trigonométrique $\cos(\theta)\cos(\phi) = \dfrac{\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)}{2}$. *Pour (b), utiliser plutôt* $\sin(\theta)\sin(\phi) = \dfrac{\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)}{2}$. *Enfin, pour (c), utiliser le fait que* $\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ *est une fonction impaire, c'est-à-dire telle que* $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.