Séance de travaux pratiques XI

Le lundi 19 avril 2021

1. On considère la fonction $f(x) = x(L-x)$ sur l'intervalle $[0, L]$.
   (a) Trouver des coefficients a_n tels que
   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad \forall x \in [0, L].$$
   (b) En évaluant l'expression précédente en $x = \frac{L}{2}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$.
   (c) Résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur une tige de longueur L si la température est maintenue à 0 à chacune des extrémités et si au temps $t = 0$, la distribution de température est donnée par la fonction $f(x) = x(L-x)$.

2. L'idée que le système orthonormale $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\}_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ constituerait une base des fonctions de carré intégrable sur $[-L, L]$ peut être rendue rigoureuse. Une des conséquences importantes de ce résultat est l'identité de Parseval :
   $$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \varphi(x)^2 dx =: \langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$
   où φ est une fonction de carré intégrable sur $[-L, L]$ et a_n, b_n sont les coefficients apparaissant dans sa série de Fourier. En quelque sorte, l'identité de Parseval donne deux manière de calculer la «longueur»
   $$\|\varphi\|_{L^2} := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2}}$$
   de la fonction φ par rapport au «produit scalaire» $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$.
   (a) En utilisant le fait (non démontré dans ce cours) que
   $$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \right\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2},$$
   établir l'identité de Parseval.
   (b) Considérons la fonction périodique de période $2L$ définie par $f(x) = -x$ pour $x \in (-L, L]$ de l'Exemple 5.13 des notes de cours. Utiliser l'identité de Parseval pour établir l'identité
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Pour $t \geq 0$, soit $T(x,t)$ une solution lisse de l'équation de la chaleur sur une tige de longueur L maintenue à la température $T = 0$ à ses deux extrémités :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0,t) = T(L,t) = 0 \; \forall \; t \geq 0.$$

Considérons la fonctionnelle associée $F(t) := \int_0^L T(x,t)^2 dx \geq 0$.

(a) Montrer que

$$F'(t) = -2\alpha^2 \int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx.$$

(b) En conclure que $F(t)$ est une quantité qui décroît avec le temps.

(c) Si T_1 et T_2 sont deux solutions lisses telles qu'initialement $T_1(x,0) = T_2(x,0)$ pour tout x, montrer qu'en fait $T_1 \equiv T_2$. *Indice : Quelle est la fonctionnelle $F(t)$ de la solution $T := T_1 - T_2$?*

4. Calculer les coefficients de la série de Fourier de la fonction périodique de période $2L$ définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in [-L, L]$. En déduire la valeur de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$