Séance de travaux pratiques XII

Le lundi 26 avril 2021

1. Résoudre l'équation des ondes $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sur une corde vibrante de longueur L dont les extrémités sont fixées (c'est-à-dire que $y(0,t) = y(L,t) = 0$) si initialement

$$y(x,0) = x(L-x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = x(L-x).$$

2. Résoudre l'équation de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans le rectangle $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b$ si les conditions au bord sont données par

$$u(0,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0 \quad \text{et} \quad u(a,y) = y(b-y) \quad \forall x, y.$$

3. Résoudre l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur une tige de longueur L si la température est maintenue à $T_1 = 0$ en $x = 0$ et à $T_2 = 10$ en $x = L$ si la distribution initiale de température est donnée par la fonction $f(x) = \dfrac{10x^2}{L^2}$.

4. On considère l'équation des ondes $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sur une corde vibrante de longueur L dont l'extrémité en $x = 0$ est fixée et l'extrémité en $x = L$ peut se mouvoir librement dans la direction verticale, de sorte que les conditions au bord sont

$$y(0,t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(L,t) = 0 \quad \forall t.$$

   (a) Trouver toutes les solutions de la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$ pour f une fonction ne dépendant que de x et g une fonction ne dépendant que de t.

   (b) Résoudre l'équation si initialement $y(x,0) = L^2 - x^2$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$.

5. Les positions de deux masses attachées à des ressorts satisfont au système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -3x_1 + 2x_2,$$
$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = 2x_1 - 3x_2.$$

Trouver la solution générale de ce système d'équations.