Séance de travaux pratiques II

Le lundi 25 janvier 2021

1. Dans un petit village comptant 100 habitants, il y a $P(t)$ habitants ayant la grippe au temps t mesuré en jours. Supposons que le taux d'augmentation de $P(t)$ soit donné par l'équation différentielle
$$\frac{dP}{dt} = \frac{kP(100 - P)}{100}$$
où k est une certaine constante.
   (a) Est-ce que la constante k devrait être positive ou négative ?
   (b) Déterminer $P(t)$ si au temps $t = 0$, il n'y a qu'une seule personne infectée.
   (c) Lorsque t devient grand, est-ce que $P(t)$ s'approche d'une certaine valeur ? Si oui, quelle est cette valeur ?
2. On considère un pont suspendu ayant un tablier (parfaitement horizontal) de densité constante.
   (a) Déterminer la forme du câble porteur Pour ce faire, on peut supposer que le poids du câble porteur est négligeable par rapport à celui du tablier.
   (b) Si le tablier est toujours parfaitement horizontal et de densité constante, mais qu'on a plutôt un pont en arc (e.g. le Harbour bridge à Sydney en Australie), déterminer la forme de optimale de l'arc en utilisant le principe d'inversion de Hooke.
3. Vérifier que les équations différentielles suivantes sont exactes et trouver leur solution générale :
   (a) $4x - y + (6y - x)\dfrac{dy}{dx} = 0$;
   (b) $\dfrac{y}{x} + \ln x \dfrac{dy}{dx} = 0$ pour $x > 0$.
4. Résoudre l'équation différentielle
$$\frac{x(x^2 + y^2)}{y} + (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$
en la mettant d'abord sous une forme exacte à l'aide d'un facteur intégrant.
5. Considérons l'équation différentielle ordinaire
$$-\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$
Montrer que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, mais que l'équation n'est pas exacte dans l'anneau
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$