Séance de travaux pratiques III

Le lundi premier février 2021

1. Calculer le wronskien des fonctions différentiables suivantes et déterminer si elles sont linéairement indépendantes sur l'intervalle $I = (-\infty, \infty)$:
   (a) $f(t) = t^2 + 3t$ et $g(t) = t^2 - 3t$;
   (b) $f(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ et $g(t) = e^{\lambda t}\sin(\mu t)$ lorsque $\mu \neq 0$;
   (c) $f(t) = x^3$ and $g(t) = |x^3|$.
2. À une constante multiplicative près, déterminer le wronskien de deux solutions de l'équation de Bessel
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$
   sans la résoudre, par exemple en utilisant le théorème d'Abel.
3. Si le wronskien de fonctions différentiables f et g est $t\cos t - \sin t$ et si $u = f + 3g$ et $v = f - g$, trouver le wronskien de u et v.
4. À l'aide de la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, établir les identités suivantes :
   (a) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$;
   (b) $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$;
   (c) $\cos(\theta)\sin(\phi) + \cos(\phi)\sin(\theta) = \sin(\theta + \phi)$;
   (d) $\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) = \cos(\theta + \phi)$;
   (e) $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.
5. Trouver la solution des équations différentielles suivantes et esquisser son graphe :
   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{x} + 5y = 0$ si $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$;
   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{x} + 5y = 0$ si $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 2$.
6. En supposant que la résistance de l'air soit négligeable et en faisant l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \theta$, déterminer la longueur d'un pendule qui mettrait exactement une seconde pour faire une oscillation complète. On rappelle que l'accélération due à l'attraction terrestre est approximativement de $g = 9,8\ m/s^2$.
7. Trouver les solutions générales des équations différentielles non homogènes suivantes :
   (a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = te^t$;
   (b) $t\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = t^2$, pour t>0.