

Séance de travaux pratiques V

Le lundi 15 février 2021

1. Montrer que $y_1(t) := t^2$ et $y_2(t) = t^{-1}$ forment un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène

$$t^2 y'' - 2y = 0, \quad \text{pour } t > 0.$$

2. Utiliser la méthode de variation des paramètres et le problème précédent pour résoudre l'équation non homogène

$$t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad \text{pour } t > 0.$$

3. Mettre les fonctions suivantes sous la forme $u = R \cos(\omega t - \delta)$.

(a) $u = 3 \cos(2t) + 4 \sin(2t)$;

(b) $u = -2 \cos \pi t - 3 \sin \pi t$.

4. On considère un circuit RLC branché à une pile induisant une force électromotrice constante E_0 , de sorte que l'équation différentielle associée est

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E_0.$$

Donner une formule de $Q(t)$ pour $t \geq 0$ et déterminer $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ si initialement $Q(0) = 0$ et $I(0) = 0$.

5. Supposons qu'un tunnel soit creusé en ligne droite à travers la planète Terre pour se rendre d'un point A à un point B à sa surface. Si des rails sont installés, alors en négligeant la friction, un train placé initialement à une extrémité du tunnel commencera à se mouvoir sous l'effet de l'attraction terrestre et oscillera entre les deux extrémités.

- (a) Montrer que le temps requis pour effectuer un voyage aller-retour est le même peu importe le choix des extrémités.

Indice : à l'intérieur de la Terre, la force gravitationnelle due à l'attraction terrestre pointe vers le centre de la Terre et est proportionnelle à la distance par rapport au centre de la Terre.

- (b) Le rayon de la Terre étant approximativement de 6371 km et l'accélération due la à force gravitationnelle de la Terre étant d'environ $9,8 m/s^2$ à sa surface, estimer la durée d'un voyage aller-retour.
- (c) Si le tunnel est d'une longueur de 2km, quelle est la vitesse maximale atteinte par le train ?
- (d) Et si le tunnel passait plutôt par le centre de la Terre, quelle serait la vitesse maximale atteinte par le train (ascenseur serait peut-être un terme plus juste dans ce cas...) ?