

## Séance de travaux pratiques VI

Le lundi 22 février 2021

1. Pour l'équation

$$my'' + \alpha y' + ky = F_0 \cos \omega t,$$

tracer le graphe de l'amplitude  $R$  de la réponse forcée  $Y(t) = R \cos(\omega t - \delta)$  en fonction de  $\omega$  lorsque  $\omega_0^2 := \frac{k}{m} < \frac{\alpha^2}{2m^2}$ . Y a-t-il une fréquence de résonance dans ce cas ?

2. Si la source de force électromotrice d'un circuit  $RLC$  est donnée par  $E(t) = E_0 \cos \omega t$ , alors l'équation différentielle satisfaite par le courant passant dans le circuit est donnée par

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -E_0 \omega \sin \omega t$$

- (a) Trouver la solution permanente  $I_p(t) = -A \sin(\omega t - \delta)$  de cette équation différentielle et montrer que son amplitude est donnée par

$$A(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}}.$$

- (b) Trouver la fréquence de résonance  $\omega_{\max}$  pour laquelle l'amplitude  $A$  est maximale.  
 (c) Tracer le graphe de  $A$  en fonction de  $\omega$ .  
 (d) Supposons que la force électromotrice  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$  soit induite par un faible signal électromagnétique de fréquence angulaire  $\omega = 100$  Hz. Si l'inductance est de  $L = 1$  H et la résistance est de  $R = 100\Omega$ , comment doit-on choisir la capacitance (mesurée en farads) pour maximiser la réception du signal ?

3. Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

(a)  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ ;

(b)  $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 2 - t & \text{si } 1 \leq t \leq 2, \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}$

4. Trouver la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

(a)  $F(s) = \frac{se^{-s}}{(s+1)(s^2+1)}$ ;

(b)  $\frac{(s-1)^2+1}{s(s-1)^2}$ .

5. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation  $y'' + y' = r(t)$  avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -1$  si  $r(t) = \begin{cases} t & \text{si } 1 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$