

Séance de travaux pratiques VI

Le lundi 22 février 2021

1. Pour l'équation

$$my'' + \alpha y' + ky = F_0 \cos \omega t,$$

tracer le graphe de l'amplitude R de la réponse forcée $Y(t) = R \cos(\omega t - \delta)$ en fonction de ω lorsque $\omega_0^2 := \frac{k}{m} < \frac{\alpha^2}{2m^2}$. Y a-t-il une fréquence de résonance dans ce cas ?

2. Si la source de force électromotrice d'un circuit RLC est donnée par $E(t) = E_0 \cos \omega t$, alors l'équation différentielle satisfaite par le courant passant dans le circuit est donnée par

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -E_0 \omega \sin \omega t$$

(a) Trouver la solution permanente $I_p(t) = -A \sin(\omega t - \delta)$ de cette équation différentielle et montrer que son amplitude est donnée par

$$A(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}}.$$

(b) Trouver la fréquence de résonance ω_{\max} pour laquelle l'amplitude A est maximale.

(c) Tracer le graphe de A en fonction de ω .

(d) Supposons que la force électromotrice $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ soit induite par un faible signal électromagnétique de fréquence angulaire $\omega = 100$ Hz. Si l'inductance est de $L = 1$ H et la résistance est de $R = 100\Omega$, comment doit-on choisir la capacitance (mesurée en farads) pour maximiser la réception du signal ?

3. Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

(a) $\frac{1}{\sqrt{t}}$;

(b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 2 - t & \text{si } 1 \leq t \leq 2, \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}$

4. Trouver la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

(a) $F(s) = \frac{se^{-s}}{(s+1)(s^2+1)}$;

(b) $\frac{(s-1)^2+1}{s(s-1)^2}$.

5. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation $y'' + y' = r(t)$ avec $y(0) = 1$

et $y'(0) = -1$ si $r(t) = \begin{cases} t & \text{si } 1 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$