Séance de travaux pratiques VII

Le lundi 15 mars 2021

1. Soit l'équation
$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = K\sin(t)$$
pour $K \in \mathbb{R}$.
   (a) Trouver la solution générale de l'équation si $K = 0$.
   (b) Trouver la solution générale si plutôt $K = 1$.
   (c) Trouver l'unique solution de l'équation si $K = 1$ et initialement, on a que $y(0) = 0$ et $\frac{dy}{dt}(0) = 0$.
2. Trouver les points ordinaires et les points singuliers réguliers des équations différentielles suivantes :
   (a) (équation de Legendre) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
   (b) $xy'' + (\cos x)y' + 3xy = 0$;
   (c) $(\sin x)^2 y'' + xy' + y = 0$;
   (d) $(x - 4)^2 y'' + 3y = 0$.

3. Soit l'équation de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Si $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une solution analytique de l'équation près de $x = 0$, montrer que les coefficients satisfont à la relation de récurrence
$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha - n)(\alpha + n + 1)}{(n + 1)(n + 2)} a_n$$
   (b) Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, montrer que l'équation de Legendre possède une solution polynomiale.
   (c) Trouver des solutions polynomiales explicites lorsque $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$.

4. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $(x - 1)^2 y'' - 2y(x) = 0$.