Séance de travaux pratiques VIII

Le lundi 22 mars 2021

1. Supposons que $x_0 = 0$ soit un point singulier régulier de l'équation
$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0.$$
Si les racines $r_1 \leq r_2$ de l'équation indicielle sont telles que $r_2 - r_1 \notin \mathbb{Z}$, montrer que les deux solutions
$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad b_0 \neq 0,$$
obtenues par la méthode de Frobenius sont linéairement indépendantes. Indice : *Que pourrait-on dire de la limite* $\lim_{x\to 0+} \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ *si les fonctions étaient linéairement dépendantes ?*

2. Soit l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + (x-2)y = 0$.
   (a) Montrer que $x = 0$ est un point singulier régulier de l'équation et déterminer son équation indicielle.
   (b) Trouver la solution générale de l'équation en utilisant la méthode de Frobenius.

3. Soit l'équation de Bessel d'ordre $\frac{1}{2}$: $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$.
   (a) Vérifier que $y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ est une solution de l'équation (en fait, on peut montrer que $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$.)
   (b) Utiliser la méthode de d'Alembert pour trouver la solution générale de l'équation.

4. Transformer l'équation $y''' - 2y'' + 3y' - y = \sin t$ en un système d'équations différentielles d'ordre 1.

5. Soit $\mathbf{A}$ une matrice $n \times n$ diagonalisable ayant pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.
   (a) Montrer que son déterminant est donné par le produit de ses valeurs propres :
$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

(b) Montrer que sa trace $\operatorname{Tr}\mathbf{A} := \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$, qui correspond à la somme des entrées sur la diagonale, est donnée par la somme des valeurs propres de $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{Tr}\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Indice : Montrer d'abord que $\operatorname{Tr}(\mathbf{BC}) = \operatorname{Tr}(\mathbf{CB})$ *pour* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *deux matrices* $n \times n$ *quelconques.*

6. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;

(d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;