Séance de travaux pratiques IX

Le lundi 29 mars 2021

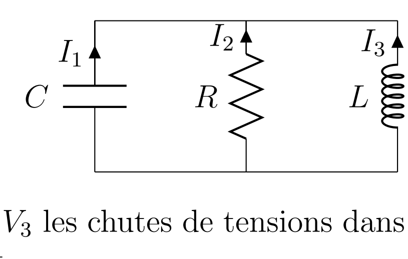
1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :
   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;
   (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;
   (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;
   (d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Trouver la solution générale du système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}$ avec $\mathbf{A}$ comme au numéro 1.

3. Donner un exemple de deux fonctions $\vec{x}_1(t)$ et $\vec{x}_2(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$, mais dont le wronskien s'annule identiquement sur $\mathbb{R}$. *Indice : Le numéro 1c du TP3 pourrait être une source d'inspiration.*

4. Soit $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n. Si $y_1, \ldots, y_n$ sont n solutions de cette équation, tenter de donner une définition de leur wronskien en ramenant cette équation à un système d'équations différentielles d'ordre 1.

5. On considère le circuit électrique suivant :



   Dénotons aussi par V_1, V_2 et V_3 les chutes de tensions dans le condensateur, la résistance et l'inducteur respectivement.
   (a) En applicant la deuxième loi de Kirchhoff dans la maille de gauche, montrer que $V_1 = V_2$. Similairement, montrer que $V_2 = V_3$.
   (b) En applicant la première loi de Kirchhoff à l'un des noeuds du circuit, montrer que $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

(c) Utiliser la relation entre la chute de tension et le courant pour chaque éléments du circuit afin de montrer que

$$CV_1' = I_1, \quad V_2 = RI_2, \quad LI_3' = V_3.$$

(d) Utiliser les équations des étapes précédentes pour éliminer V_2, V_3 et I_1, I_2 et obtenir le système d'équations linéaires

$$CV_1' = -I_3 - \frac{V_1}{R}, \quad LI_3' = V_1.$$

(e) Trouver la solution générale de cette équation si $R = 1\Omega$, $C = 1F$ et $L = 1H$.