Devoir I

Dû le mardi 21 septembre 2021

Instructions : Il y a cinq problèmes. Chaque problème vaut vingt points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. Soit $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application qui préserve le produit scalaire, c'est-à-dire que $\langle \mathbf{A}\vec{v}, \mathbf{A}\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ pour tous $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Montrer alors que $\mathbf{A}$ est forcément une application linéaire.
2. Donner un exemple d'une transformation euclidienne qui ne préserve pas le produit scalaire.
3. Donner un exemple de deux transformations euclidiennes qui ne commutent pas lorsqu'on les compose.
4. On dénote par $O(2)$ l'ensemble des transformations orthogonales $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Montrer que $O(2)$ est un groupe lorsqu'on utilise la composition comme opération interne.
5. Mettre sous la forme $t(\vec{r}) = \mathbf{A}\vec{r} + \vec{b}$ pour $\mathbf{A} \in O(2)$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ la transformation euclidienne $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par :
   (a) une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens anti-horaire autour du point $(3, 1) \in \mathbb{R}^2$;
   (b) une réflexion par rapport à la droite L d'équation $y = 2x + 1$.