Devoir II

Dû le mardi 5 octobre 2021

Instructions : En comptant les sous-questions, il y a cinq problèmes. Chaque problème vaut vingt points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. Soient $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une transformation affine de la forme $t(\vec{r}) = \mathbf{A}\vec{r} + \vec{b}$ et P un polynôme de degré deux de la forme
$$P(\vec{r}) = \langle \vec{r}, \mathbf{M}\vec{r} \rangle + \mathbf{N}\vec{r} + H,$$
avec $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{N} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des applications linéaires. On suppose (sans perte de généralité pour le polynôme P) que la matrice $\mathbb{M}$ associée à $\mathbf{M}$ est symétrique. En utilisant la notation $\mathbb{A}$ pour désigner les matrices associées à $\mathbf{A}$, montrer que
$$P \circ t(\vec{r}) = \langle \vec{r}, \mathbf{M}'\vec{r} \rangle + \mathbf{N}'\vec{r} + H'$$
avec $\mathbf{M}' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire associée à la matrice
$$\mathbb{M}' := \mathbb{A}^T \mathbb{M} \mathbb{A}$$
et
$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(\vec{r}) &:= \mathbf{N}(\mathbf{A}\vec{r}) + 2\langle \vec{b}, \mathbf{M}\mathbf{A}\vec{r} \rangle, \\ H' &:= H + (\mathbf{N}\vec{b}) + \langle \vec{b}, \mathbf{M}\vec{b} \rangle. \end{aligned}$$

2. Une ellipse est tangente aux côtés AB, BC, CD et DA d'un parallélogramme $ABCD$ aux points P, Q, R, S respectivement. Montrer que $\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{QB}} = \dfrac{\overline{CR}}{\overline{BP}}$.

3. On considère le plan $\Pi_{z=1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathbf{M} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire inversible.
   (a) Montrer que $\mathbf{M}$ envoie le plan $\Pi_{z=1}$ sur lui-même si et seulement si la matrice $\mathbb{M}$ associée à $\mathbf{M}$ est de la forme
$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbb{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad \det(\mathbb{A}) \neq 0.$$

(b) Si $\mathbf{M}$ envoie le plan $\Pi_{z=1}$ sur lui-même, montrer que $\mathbf{M}$ induit une transformation affine de $\Pi_{z=1}$ lorsque celui-ci est identifié avec $\mathbb{R}^2$ via l'identification

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R}^2 & \to & \Pi_{z=1} \\ & (x, y) & \mapsto & (x, y, 1). \end{array}$$

Autrement dit, si $\mathbf{M}$ envoie le plan $\Pi_{z=1}$ sur lui-même, montrer que l'application $\psi^{-1} \circ \mathbf{M} \circ \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une transformation affine.

(c) Montrer que muni de l'opération de composition, l'ensemble des applications linéaires inversibles $\mathbf{K} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ envoyant le plan $\Pi_{z=1}$ sur lui-même est un groupe.