Devoir III

Dû le mardi 9 novembre 2021

Instructions : Il y a six problèmes. Chaque problème vaut vingt points, la note maximale étant de 100 et le dernier problème donnant des points en boni permettant de compenser pour des points qui auraient été perdus dans les cinq premiers problèmes. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps fini à p éléments où l'addition et la multiplication se font modulo p. Par exemple, pour $p = 7$, on a que $3 + 4 = 0 \mod 7$, donc 4 est l'inverse additif de 3 dans $\mathbb{F}_7$, alors que $3 \cdot 5 = 1 \mod 7$, donc 5 est l'inverse multiplicatif de 3 dans $\mathbb{F}_7$. Par analogie avec le corps des nombres réels, une droite L de l'espace vectoriel $\mathbb{F}_p^3$ (de corps $\mathbb{F}_p$) passant par l'origine est un sous-ensemble de la forme

$$L = \{(a_0t, a_1t, a_2t) \in \mathbb{F}_p^3 \mid t \in \mathbb{F}_p\}$$

pour un certain $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{F}_p^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. On définit le plan projectif $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$ comme étant l'ensemble des droites de l'espace vectoriel $\mathbb{F}_p^3$ passant par l'origine. Comme pour $\mathbb{RP}^2$, on peut utiliser la notation $L = [a_0 : a_1 : a_2]$ avec la convention cette fois que $[a_0 : a_1 : a_2] = [a_0t : a_1t : a_3t]$ pour $t \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$.

De même, un plan Π de $\mathbb{F}_p^3$ passant par l'origine est un sous-ensemble de la forme :

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_p^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

pour un certain $(a, b, c) \in \mathbb{F}_p^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

1. Combien de points le plan projectif $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$ possède-t-il ?
2. Par analogie avec $\mathbb{RP}^2$, donner une définition de droite projective dans le plan projectif $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$. Combien y a-t-il de droites projectives différentes dans $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$?
3. Soit $Q = [q_0 : q_1 : q_2]$ un point de $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$. Combien de droites projectives de $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$ passent par ce point ?
4. Soient $P = [p_0 : p_1 : p_2]$ et $Q = [q_0 : q_1 : q_2]$ deux points distincts de $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$. Montrer qu'il existe une seule droite projective de $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$ passant par ces deux points. Indice : Considérer le noyau de l'application linéaire $A : \mathbb{F}_p^3 \to \mathbb{F}_b^2$ associée à la matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix}$.
5. Soient L_1 et L_2 deux droites projectives distinctes dans $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$. Montrer que ces droites se coupent en exactement un point.
6. Un jeu consiste en 13 cartes sur lesquelles sont dessinés des symboles. Lorsqu'on prend deux cartes quelconques, il y a toujours exactement un symbole commun aux deux cartes. De plus, chaque symbole apparaît sur exactement 4 cartes. Déterminer de façon géométrique un nombre de symboles distincts pour lequel il est possible de réaliser un tel jeu. Quel serait le nombre de symboles par carte ?