Devoir IV

Dû le mardi 30 novembre 2021

Instructions : Il y a cinq problèmes. Chaque problème vaut vingt points, pour un total de 100 points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. Soit T un triangle sphérique de sommets A, B, C et de côtés a, b, c sur une sphère de rayon $r > 0$. Soient α, β et γ les angles internes mesurés en radians du triangle T aux sommets A, B et C. Déduire du Théorème 4.18 des notes de cours que
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\text{aire}(T)}{r^2},$$
où aire(T) est l'aire du triangle T sur la sphère de rayon r.

2. Sur la sphère $\mathbb{S}^2$ de rayon 1 centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les seuls cercles passant par le pôle Sud $S = (0, 0, -1)$ et perpendiculaires à l'équateur $E := \mathbb{S}^2 \cap \Pi_{z=0}$ sont les méridiens, c'est-à-dire les grands cercles passant par le pôle Nord $N = (0, 0, 1)$ et le pôle Sud.

3. Pour $r > 0$, montrer que l'homothétie
$$\begin{array}{rccc} h_r : & \widehat{\mathbb{C}} & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ & z & \mapsto & rz \end{array}$$
est la composée de deux inversions.

4. Soit $M : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ la transformation de Möbius donnée par $M(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. Quelle est l'image par M du cercle $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$?

5. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ trois cercles dans le plan $\mathbb{R}^2$ qui sont chacun tangent aux deux autres en des points distincts.
   (a) Montrer qu'il existe une inversion du plan complexe étendu $\hat{\mathbb{C}}$ envoyant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur des cercles généralisés de la forme $L_1 \cup \{\infty\}$ et $L_2 \cup \{\infty\}$ avec L_1 et L_2 des droites parallèles.
   (b) Montrer qu'il existe exactement deux cercles généralisés qui sont chacun tangent aux trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.