

MAT2400 : Géométries

Frédéric Rochon

20 décembre 2021

Résumé

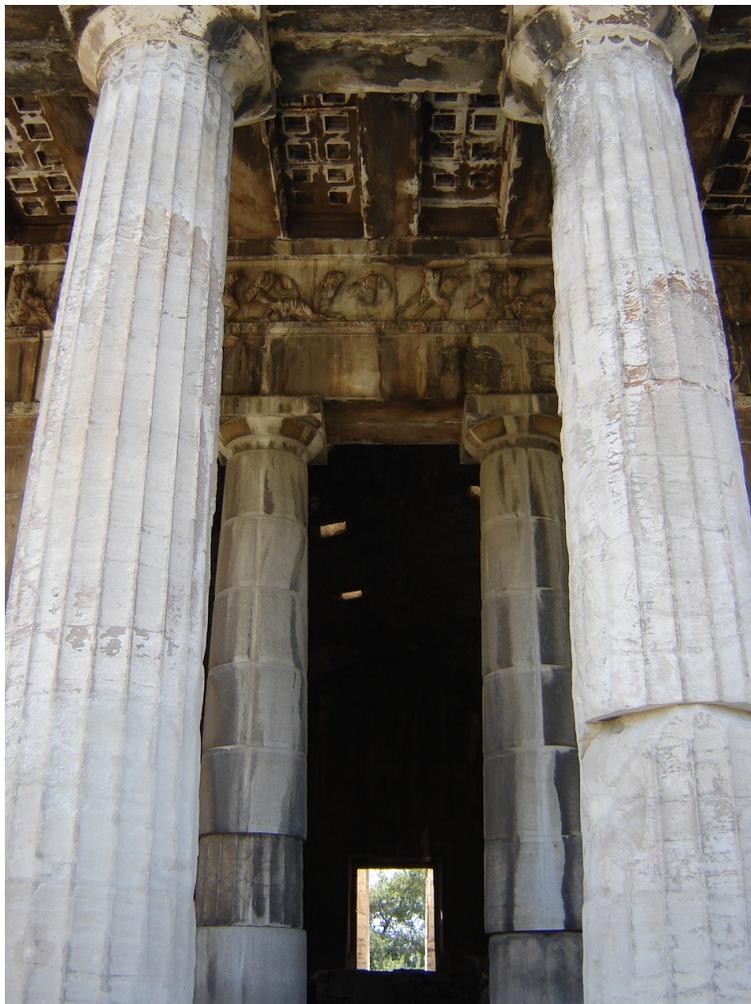
Ce recueil contient les notes du cours **Géométries (MAT2400)** donné à l'Université du Québec à Montréal à l'automne 2021.



Table des matières

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Géométrie euclidienne | 5 |
| 1.1 | Calcul de la circonférence de la Terre | 5 |
| 1.2 | Un aperçu des <i>Éléments</i> d'Euclide | 6 |
| 1.3 | Un point de vue plus algébrique | 11 |
| 1.4 | Problèmes | 16 |
| 2 | Géométrie affine | 19 |
| 2.1 | Les transformations affines | 19 |
| 2.2 | Quelques résultats classiques de géométrie affine | 23 |
| 2.3 | Les coniques en géométrie affine | 29 |
| 2.4 | Problèmes | 34 |
| 3 | Géométrie projective | 37 |
| 3.1 | Le plan projectif réel | 38 |
| 3.2 | Les transformations projectives | 42 |
| 3.3 | Quelques résultats de géométrie projective | 45 |
| 3.4 | Origines géométriques des transformations projectives | 51 |
| 3.5 | Problèmes | 56 |
| 4 | Géométrie sphérique | 61 |
| 4.1 | La notion de distance sur la sphère \mathbb{S}^2 | 63 |
| 4.2 | Trigonométrie sur la sphère \mathbb{S}^2 | 66 |
| 4.3 | La projection stéréographique | 69 |
| 4.4 | Problèmes | 75 |
| 5 | Géométrie inversive | 77 |
| 5.1 | Les transformations conformes et les inversions | 78 |
| 5.2 | Les transformations de Möbius | 81 |
| 5.3 | Les transformations conformes sont des transformations inversives | 85 |
| 5.4 | Le théorème fondamental de la géométrie inversive | 88 |
| 5.5 | Faisceaux de cercles | 89 |
| 5.6 | Problèmes | 96 |
| 6 | Géométrie hyperbolique | 101 |
| 6.1 | Le modèle du disque | 101 |
| 6.2 | La notion de distance en géométrie hyperbolique | 104 |
| 6.3 | Variation infinitésimale de la distance | 111 |
| 6.4 | Le modèle du demi-plan de Poincaré | 112 |
| 6.5 | Trigonométrie hyperbolique | 115 |
| 6.6 | Le groupe d'isométrie du plan hyperbolique | 120 |
| 6.7 | Problèmes | 121 |

1 Géométrie euclidienne



Le mot *géométrie* vient de la composition des mots grecs *gê* (qui prend en composition la forme *geô*) et *metron* qui signifient respectivement *Terre* et *mesure*. Avant de désigner la science mathématique de l'espace, le mot a en fait d'abord été utilisé au sens d'*arpentage*. Ce sens a d'ailleurs perduré dans des termes tels que *arpenteur-géomètre*.

1.1 Calcul de la circonférence de la Terre

Pour renouer avec ce sens premier du terme, il n'est pas mauvais de rappeler un des hauts faits de la Grèce antique : l'estimation de la circonférence de la Terre par Ératosthène, un savant grec du troisième siècle avant notre ère. Contemporain d'Archimède, Ératosthène a entre autres été directeur de la bibliothèque d'Alexandrie. En 230 avant notre ère, il a

réussi à calculer la circonférence de la Terre en partant de l'observation suivante. À midi lors du solstice d'été le 21 juin, Ératosthène avait remarqué qu'à Syène, une ville au sud d'Alexandrie, il n'y avait aucune ombre au fond d'un certain puits, le Soleil étant à la verticale et sa lumière éclairant directement le fond du puits. Cette observation correspond au fait que Syène est située à peu près sur le tropique du Cancer. Or, la même heure du même jour de l'année, Ératosthène avait noté aussi qu'un bâton placé à la verticale avait une ombre. En comparant la longueur de l'ombre avec celle du bâton, il en déduisit que l'angle entre les rayons du Soleil et la verticale était d'environ un cinquantième d'un angle plein, c'est-à-dire environ $\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25}$ radian. Sur la Figure 1, cet angle correspond à l'angle $\angle BAC$, les points A , S et O correspondant respectivement à Alexandrie, Syène et le centre de la Terre. Or, en supposant que le Soleil est suffisamment distant, les droites AC et OS sont presque parallèles, de sorte que l'angle $\angle BAC$ est presque qu'égal à l'angle $\angle SOA$, à savoir la différence de latitude entre Alexandrie et Syène. Comme la distance entre Syène et Alexandrie était à l'époque évaluée à 5000 stades, Ératosthène en conclut que la circonférence de la Terre devait approximativement mesurer

$$50 \times 5000 \text{ stades} = 250000 \text{ stades.}$$

La longueur exacte du stade utilisé par Ératosthène n'est pas connue, mais si on suppose qu'il a utilisé le stade égyptien de 157,5 m, cela correspond à une circonférence de 39 375 km, ce qui est assez proche de la véritable valeur de la circonférence terrestre, à savoir 40 075 km.

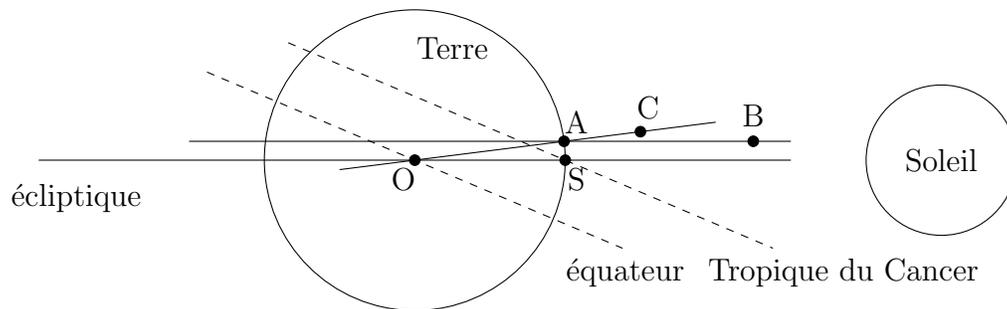


FIGURE 1 – Le calcul de la circonférence de la Terre par Ératosthène

1.2 Un aperçu des *Éléments* d'Euclide

Dans son calcul, Ératosthène a entre autres utilisé le fait que deux angles correspondants engendrés par une sécante coupant deux droites parallèles sont forcément égaux. Si un tel fait peut sembler intuitivement clair, plusieurs énoncés géométriques sont moins évidents et requièrent un argument pour s'en convaincre. Un autre mathématicien grec, Euclide, qui aurait vraisemblablement vécu après les disciples de Platon, mais un peu avant Ératosthène, a contribué d'une manière fondamentale à la géométrie. Dans *Les Éléments*, son ouvrage phare, Euclide a organisé de manière systématique les énoncés géométriques connus de l'époque en donnant des démonstrations complètes s'appuyant sur cinq énoncés simples admis comme évidents : les postulats d'Euclide. Cette manière de procéder fait des *Éléments* un texte

fondateur ayant jeté les bases de la géométrie et des mathématiques et dont l'influence profonde se fait encore sentir aujourd'hui de multiples manières.

La géométrie développée dans les *Éléments*, qu'on appelle de nos jours la **géométrie euclidienne**, est celle de l'étude des figures dans le plan, plus particulièrement celle pouvant être construites à l'aide d'une règle et d'un compas : points, segments, droites, cercles, triangles, etc. Tel que mentionné plus haut, la géométrie euclidienne s'appuie sur cinq énoncés élémentaires, les postulats d'Euclide :

1. Pour toute paire de points du plan, il existe une droite passant par ces deux points ;
2. Tout segment de droite peut être prolongé en une droite ;
3. Pour tout point et tout intervalle, il existe un cercle ayant pour centre ce point et de rayon égal à la longueur de l'intervalle ;
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux ;
5. Si une droite tombant sur deux droites fait des angles intérieurs et du même côté plus petits que deux angles droits, alors les deux droites se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

Bien que dans ce cours nous allons sortir du cadre purement géométrique proposée par Euclide en adoptant un point de vue plus algébrique, il n'est pas mauvais de survoler rapidement quelques-uns des résultats présentés dans les *Éléments*. Commençons par le tout premier résultat des *Éléments*.

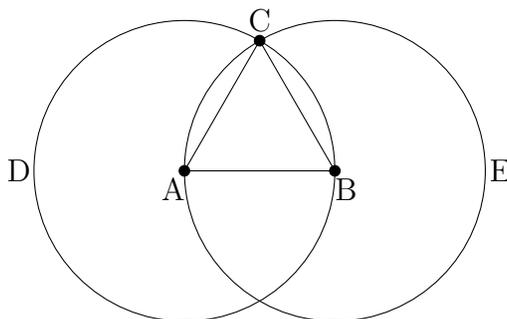


FIGURE 2 – Construction d'un triangle équilatéral

Proposition 1.1. (*[Euc, Proposition 1, Livre I]*) Pour un segment AB , il existe un triangle équilatéral ABC tel que AB est l'un des côtés.

Démonstration. Tel qu'illustré dans la Figure 2, traçons le cercle D de rayon AB et de centre A , ainsi que le cercle E de rayon AB et de centre B . Alors les cercles D et E s'entrecoupent en C . Le triangle ABC est alors équilatéral, car AB est égal à AC et à CB par la définition du cercle. \square

Un résultat propre à la géométrie euclidienne est celui concernant la somme des angles intérieurs d'un triangle.

Proposition 1.2. (*[Euc, Proposition 32, Livre I]*) Dans tout triangle, l'un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs sont égaux à deux angles droits.

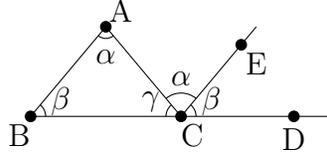


FIGURE 3 – Sommes des angles intérieurs d'un triangle

Démonstration. Soit ABC un triangle et prolongeons le côté BC en C vers le point D . Grâce à [Euc, Proposition 31, Livre I], faisons passer la droite en C parallèle à la droite AB et disons qu'elle passe en un point E différent de C . Alors l'angle $\angle ECD$ est égal à l'angle $\angle CBA$ par [Euc, Proposition 29, Livre I], puisque EC est parallèle à AB . De même, par [Euc, Proposition 29, Livre I], l'angle $\angle ACE$ est égal à l'angle $\angle BAC$, puisque EC est parallèle à AB . Comme la somme des angles $\angle BCA$, $\angle ACE$ et $\angle ECD$ est égale à l'angle $\angle BCD$, lui-même égale à deux angles droits, on en déduit que la somme des trois angles intérieurs du triangle $\angle BCA$, $\angle CBA$ et $\angle BAC$ est égale à deux angles droits. \square

Remarque 1.3. Par le biais de [Euc, Proposition 29, Livre I], la preuve de la Proposition 1.2 fait intervenir le cinquième postulat d'Euclide.

Dans le premier livre des Éléments, Euclide donne aussi la démonstration suivante du théorème de Pythagore.

Proposition 1.4. ([Euc, Proposition 47, Livre I]) *Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Démonstration. Tel qu'illustré dans la Figure 4, soit ABC un triangle rectangle ayant $\angle BAC$ comme angle droit. Soient $BCED$, $BAGF$ et $ACKH$ des carrés à l'extérieur du triangle ABC ayant pour côtés respectivement BC , BA et AC . Soit AL une droite passant par A et parallèle à BD coupant DE en L et BC en M . Remarquons que :

1. L'angle $\angle DBA = \frac{\pi}{2} + \angle CBA = \angle CBF$;
2. $\overline{BD} = \overline{BC}$ et $\overline{BF} = \overline{BA}$;

Les triangles FBC et DBA sont donc semblables, puisqu'ils ont un angle semblable avec des côtés de part et d'autre de longueurs égales. Par un raisonnement similaire, on voit aussi que le triangle BCK est semblable au triangle ACE . Maintenant, l'aire du rectangle $BDLM$ est deux fois celle du triangle BDA , puisqu'ils ont la même base BD et la même hauteur \overline{DL} . De même, l'aire du carré $FBAG$ est deux fois celle du triangle FBC , puisqu'ils ont la même base FB et la même hauteur \overline{BA} . Il faut donc que l'aire du carré $FBAG$ soit égale à celle du rectangle $BDLM$.

Similairement, on montre que l'aire du carré $ACKH$ est égale à celle du rectangle $LECM$. Comme le carré $BCED$ couvre la même superficie que les rectangles $BDLM$ et $LECM$, on en conclut que l'aire du carré $BCED$ doit être égale à la somme des aires des carrés $FGAB$ et $ACKH$, autrement dit :

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2.$$

\square

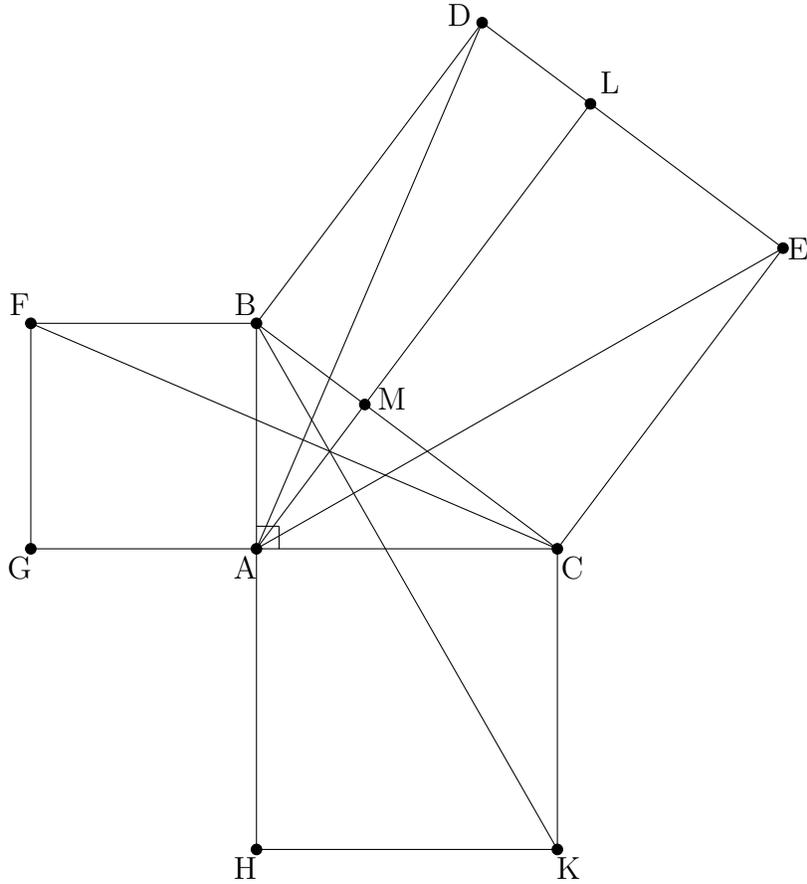


FIGURE 4 – Preuve du théorème de Pythagore

Terminons notre survol des *Éléments d'Euclide* avec un autre résultat important, le théorème de Thalès.

Proposition 1.5. (*[Euc, Proposition 2, Livre VI]*) Soit ABC un triangle et DE une droite coupant les segments AB et AC en D et E respectivement. Alors la droite DE est parallèle à BC si et seulement si

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \quad (1.1)$$

Démonstration. \implies) Si DE est parallèle à BC , les triangles DBC et BEC ont la même hauteur et la même base BC , donc la même aire :

$$\text{Aire}(\triangle DBC) = \text{Aire}(\triangle EBC). \quad (1.2)$$

Maintenant, par rapport à la droite AB , les triangles ADC et ABC ont la même hauteur, donc :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\text{Aire}(\triangle ADC)}{\text{Aire}(\triangle ABC)}. \quad (1.3)$$

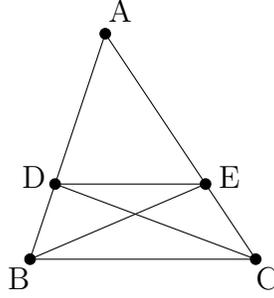


FIGURE 5 – Preuve du théorème de Thalès

De même, par rapport à la droite AC , les triangles ABC et AEB ont la même hauteur, donc

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\text{Aire}(\triangle AEB)}{\text{Aire}(\triangle ABC)}. \quad (1.4)$$

Ainsi, en combinant ces résultats, on obtient que :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} &= \frac{\text{Aire}(\triangle ADC)}{\text{Aire}(\triangle ABC)}, \quad \text{par (1.3)} \\ &= \frac{\text{Aire}(\triangle ABC) - \text{Aire}(\triangle DBC)}{\text{Aire}(\triangle ABC)} = \frac{\text{Aire}(\triangle ABC) - \text{Aire}(\triangle EBC)}{\text{Aire}(\triangle ABC)}, \quad \text{par (1.2),} \\ &= \frac{\text{Aire}(\triangle AEB)}{\text{Aire}(\triangle ABC)} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}, \quad \text{par (1.4).} \end{aligned}$$

\Leftarrow) On suppose maintenant qu'on a l'égalité (1.1). Dans ce cas, il faut aussi que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} - \overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC} - \overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}}, \quad (1.5)$$

donc que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}. \quad (1.6)$$

Or, comme les triangles BDE et ADE ont la même hauteur par rapport à la droite AB , on a que

$$\frac{\text{Aire}(\triangle BDE)}{\text{Aire}(\triangle ADE)} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}. \quad (1.7)$$

De même, comme les triangles CED et AED ont la même hauteur par rapport à la droite AC , on a que

$$\frac{\text{Aire}(\triangle CED)}{\text{Aire}(\triangle ADE)} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}. \quad (1.8)$$

On déduit de (1.6), (1.7) et (1.8) que

$$\frac{\text{Aire}(\triangle BDE)}{\text{Aire}(\triangle ADE)} = \frac{\text{Aire}(\triangle CED)}{\text{Aire}(\triangle ADE)} \implies \text{Aire}(\triangle BDE) = \text{Aire}(\triangle CED). \quad (1.9)$$

Ces deux triangles doivent donc avoir la même hauteur par rapport à leur base commune DE , ce qui montre que la droite BC est forcément parallèle à la droite DE , cf. [Euc, Proposition 39, Livre I]. \square

1.3 Un point de vue plus algébrique

Le développement par François Viète de notations simples et efficaces pour effectuer des calculs algébriques a permis à René Descartes, via l'introduction du plan cartésien, de développer au *XVII^e* siècle une nouvelle approche pour étudier des questions de nature géométriques : la géométrie analytique. En effet, les coordonnées du plan cartésien permettent de décrire une situation géométrique donnée en termes de systèmes d'équations. Par exemple, une droite correspond à une équation linéaire, alors qu'une conique est décrite par une équation polynomiale d'ordre 2. Cela permet d'utiliser des méthodes algébriques, notamment celles de l'algèbre linéaire, pour étudier des questions de géométrie euclidienne.

En termes des coordonnées du plan cartésien, le théorème de Pythagore peut être formulé de la manière suivante.

Corollaire 1.6 (du théorème de Pythagore). *Dans le plan cartésien \mathbb{R}^2 , la distance entre deux points de coordonnées (a, b) et (c, d) est donnée par*

$$\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

En termes du produit scalaire

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad \text{pour } \vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \vec{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2,$$

la distance entre les points \vec{a} et \vec{b} s'écrit aussi

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\| := \sqrt{\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle}.$$

Définition 1.7. Une **isométrie** de \mathbb{R}^2 est une bijection $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui préserve les distances :

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2, \quad d(\vec{a}, \vec{b}) = d(I(\vec{a}), I(\vec{b})).$$

Exemple 1.8. Une translation

$$\begin{aligned} T_{\vec{a}} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{r} &\mapsto \vec{r} + \vec{a} \end{aligned}$$

est une isométrie, puisque pour tous $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$d(T_{\vec{a}}(\vec{r}_1), T_{\vec{a}}(\vec{r}_2)) = \|(\vec{r}_1 + \vec{a}) - (\vec{r}_2 + \vec{a})\| = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = d(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Exemple 1.9. Si I_1 et I_2 sont deux isométries, alors leur composée $I_1 \circ I_2$ est aussi une isométrie.

Définition 1.10. Une **base orthogonale** de \mathbb{R}^2 est une base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ telle que

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0.$$

Une **base orthonormale** de \mathbb{R}^2 est une base orthogonale $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ telle que

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 1.$$

Proposition 1.11. Si $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une isométrie, alors

$$I(\vec{r}) = T_{\vec{a}} \circ \mathbf{A}(\vec{r}) = \mathbf{A}(\vec{r}) + \vec{a} \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^2,$$

où $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire et $\vec{a} = I(\vec{0})$, $\vec{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ dénotant l'origine. De plus, \mathbf{A} préserve le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Démonstration. Posons $\mathbf{A} := (T_{\vec{a}})^{-1} \circ I = T_{-\vec{a}} \circ I$, de sorte que

$$T_{\vec{a}} \circ \mathbf{A} = T_{\vec{a}} \circ (T_{-\vec{a}})^{-1} \circ I = I.$$

Par l'Exemple 1.9, \mathbf{A} est une isométrie. Il faut montrer qu'elle préserve le produit scalaire et que c'est une application linéaire, c'est-à-dire que :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{r} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A}(\lambda \vec{r}) = \lambda \mathbf{A}(\vec{r});$
2. $\forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \mathbf{A}(\vec{r}_1) + \mathbf{A}(\vec{r}_2).$

D'abord, \mathbf{A} préserve l'origine, puisque

$$\mathbf{A}(\vec{0}) = T_{-\vec{a}} \circ I(\vec{0}) = T_{-\vec{a}}(\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}.$$

Or, comme

$$\begin{aligned} d(\vec{r}_1, \vec{r}_2)^2 &= \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2 = \|\vec{r}_1\|^2 - 2\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle + \|\vec{r}_2\|^2 \\ &= d(\vec{r}_1, 0) - 2\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle + d(\vec{r}_2, 0) \end{aligned} \tag{1.10}$$

et que \mathbf{A} est une isométrie préservant l'origine, on a que pour tous $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}\vec{r}_1, \mathbf{A}\vec{r}_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left(d(\mathbf{A}\vec{r}_1, \vec{0})^2 + d(\mathbf{A}\vec{r}_2, \vec{0})^2 - d(\mathbf{A}\vec{r}_1, \mathbf{A}\vec{r}_2) \right), \quad \text{par (1.10),} \\ &= \frac{1}{2} \left(d(\mathbf{A}\vec{r}_1, \mathbf{A}\vec{0})^2 + d(\mathbf{A}\vec{r}_2, \mathbf{A}\vec{0})^2 - d(\mathbf{A}\vec{r}_1, \mathbf{A}\vec{r}_2) \right), \quad \text{car } \mathbf{A} \text{ préserve l'origine,} \\ &= \frac{1}{2} \left(d(\vec{r}_1, \vec{0})^2 + d(\vec{r}_2, \vec{0})^2 - d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right), \quad \text{car } \mathbf{A} \text{ est une isométrie,} \\ &= \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle, \quad \text{par (1.10),} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que \mathbf{A} préserve bien le produit scalaire. Reste à montrer que \mathbf{A} est linéaire. Il suffit pour ce faire de montrer que le vecteur

$$\vec{v} := \mathbf{A}(\lambda \vec{r}_1 + \vec{r}_2) - \lambda \mathbf{A}(\vec{r}_1) - \mathbf{A}(\vec{r}_2)$$

est nul pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que $\|\vec{v}\|^2 = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^2$. Or, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on calcule que

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|^2 &= \|\mathbf{A}(\lambda\vec{r}_1 + \vec{r}_2)\|^2 + \lambda^2\|\mathbf{A}(\vec{r}_1)\|^2 + \|\mathbf{A}(\vec{r}_2)\|^2 - 2\lambda\langle\mathbf{A}(\lambda\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \mathbf{A}(\vec{r}_1)\rangle \\ &\quad - 2\langle\mathbf{A}(\lambda\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \lambda\mathbf{A}(\vec{r}_2)\rangle - 2\lambda\langle\mathbf{A}(\vec{r}_1), \mathbf{A}(\vec{r}_2)\rangle, \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire,} \\ &= \|\lambda\vec{r}_1 + \vec{r}_2\|^2 + \lambda^2\|\vec{r}_1\|^2 + \|\vec{r}_2\|^2 - 2\lambda\langle\lambda\vec{r}_1 + \vec{r}_2, \vec{r}_1\rangle \\ &\quad - 2\langle\lambda\vec{r}_1 + \vec{r}_2, \vec{r}_2\rangle - 2\lambda\langle\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle, \quad \text{car } \mathbf{A} \text{ préserve le produit scalaire,} \\ &= \|\lambda\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - (\lambda\vec{r}_1 + \vec{r}_2)\|^2 = \|\vec{0}\|^2 = 0, \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire,} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Définition 1.12. Une **application orthogonale** est une application linéaire $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui préserve le produit scalaire :

$$\langle A\vec{r}_1, A\vec{r}_2 \rangle = \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 1.13. Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est une base orthonormale, montrer qu'une application linéaire \mathbf{A} est orthogonale si et seulement si $\{\mathbf{A}\vec{e}_1, \mathbf{A}\vec{e}_2\}$ est aussi une base orthonormale.

Exercice 1.14. Via la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, une matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ induit une application orthogonale si et seulement si $\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \text{Id}$.

Exemple 1.15. Une rotation d'un angle θ par rapport à l'origine dans le sens anti-horaire est une application orthogonale. Dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , une telle rotation est donnée par la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

la première colonne correspondant au vecteur $\mathbb{A}(\vec{i}) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, la deuxième au vecteur

$$\mathbb{A}(\vec{j}) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.16. Une réflexion \mathbf{A} par rapport à une droite L passant par l'origine est une application orthogonale. En effet, si \vec{n} est un vecteur unitaire perpendiculaire à la droite L et \vec{t} est un vecteur unitaire tangent à la droite L , alors $\{\vec{n}, \vec{t}\}$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^2 telle que $\mathbf{A}\vec{n} = -\vec{n}$ et $\mathbf{A}\vec{t} = \vec{t}$. En particulier, $\{\mathbf{A}\vec{n}, \mathbf{A}\vec{t}\}$ est aussi une base orthonormale, confirmant que \mathbf{A} est bien une application orthogonale. On dit que la droite L est l'axe de symétrie de la réflexion \mathbf{A} .

Définition 1.17. Une **transformation euclidienne** est une application $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme

$$t(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{a} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2,$$

où \mathbf{A} est une application orthogonale et $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$.

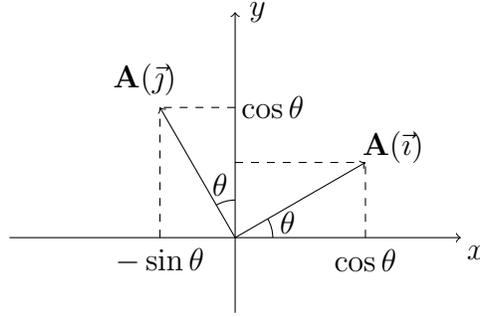


FIGURE 6 – Rotation d'un angle θ dans le sens anti-horaire

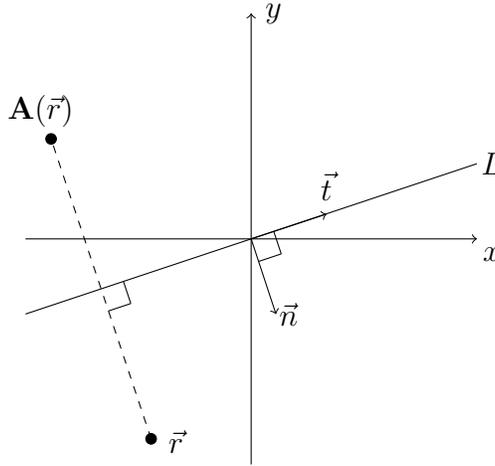


FIGURE 7 – Réflexion par rapport à une droite L passant par l'origine

Par la Proposition 1.11, une transformation euclidienne est la même chose qu'une isométrie de \mathbb{R}^2 .

Exemple 1.18. Une rotation \mathbf{R} d'un angle θ dans le sens horaire autour d'un point $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ qui n'est pas nécessairement l'origine est une transformation euclidienne. En effet, si \mathbf{A} est une rotation d'un angle θ dans le sens anti-horaire autour de l'origine, alors

$$\mathbf{R} = T_{\vec{a}} \circ \mathbf{A} \circ T_{-\vec{a}}$$

est une composition d'isométries, donc est une isométrie par l'Exemple 1.9.

Exemple 1.19. Une réflexion \mathbf{R} par rapport à une droite L ne passant pas par l'origine est une transformation euclidienne. En effet, si $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ appartient à la droite L et \mathbf{A} est la réflexion par rapport à la droite $T_{-\vec{a}}(L)$, alors

$$\mathbf{R} = T_{\vec{a}} \circ \mathbf{A} \circ T_{-\vec{a}}$$

est une composition d'isométries, donc est une isométrie.

Lemme 1.20. Si $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une isométrie, alors l'application inverse $I^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est aussi une isométrie.

Démonstration. Comme I est une isométrie, c'est une bijection et son inverse I^{-1} est donc bien défini. Soient $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^2$ quelconques. Alors en utilisant le fait que I est une isométrie, on a que

$$\begin{aligned} d(I^{-1}(\vec{r}_1), I^{-1}(\vec{r}_2)) &= d(I(I^{-1}(\vec{r}_1)), I(I^{-1}(\vec{r}_2))) \\ &= d(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \end{aligned}$$

ce qui montre que I^{-1} préserve la distance et est donc une isométrie. \square

Pour décrire la structure algébrique de l'ensemble des transformations euclidiennes sous l'opération de composition, on peut faire appel à la notion de groupe, une notion étudiée en détail dans le cours de Théorie des groupes (MAT2250).

Définition 1.21. Un **groupe** est un ensemble G muni d'une opération associative

$$* : G \times G \rightarrow G$$

telle que :

1. Il existe $e \in G$, dit **l'élément neutre**, tel que $e * g = g * e = g \quad \forall g \in G$;
2. Pour tout g dans G , il existe $g^{-1} \in G$ tel que $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

Rappelons ici que de dire que l'opération $*$ est associative signifie que

$$g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G.$$

Exemple 1.22. Les entiers $(\mathbb{Z}, +)$ munis de l'addition forment un groupe ayant 0 pour élément neutre. De même, les nombres réels $(\mathbb{R}, +)$ forment un groupe dont l'élément neutre est 0. Les nombres réels strictement positifs $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ munis de la multiplication forment un groupe dont l'élément neutre est 1.

Dans le cadre de ce cours, nous allons surtout nous intéresser à des groupes de transformations agissant sur des espaces géométriques. Dans ce contexte, le critère simple suivant nous sera utile pour déterminer lorsqu'un ensemble de transformations muni de l'opération de composition forme un groupe.

Lemme 1.23. Soit E un ensemble et soit G un ensemble de bijections de E vers E . Alors G muni de l'opération de composition forme un groupe pourvu que :

1. $\forall g_1, g_2 \in G, \quad g_1 \circ g_2 \in G$;
2. L'application identité $\text{Id} : E \rightarrow E$ est un élément de G ;
3. $\forall g \in G$, la bijection inverse $g^{-1} : E \rightarrow E$ est un élément de G .

Démonstration. L'opération de composition est une opération associative. La condition 1 nous assure qu'elle induit une opération interne sur G . Grâce à la condition 2, l'application identité est un élément neutre de G . Enfin, la condition 3 nous assure que chaque élément de G possède un inverse dans G . Les deux conditions de la Définition 1.21 sont satisfaites, ce qui montre que G muni de l'opération de composition est bien un groupe. \square

Applications ce critère à l'ensemble des transformations euclidiennes

Théorème 1.24. *L'ensemble des transformations euclidiennes muni de l'opération de composition forme un groupe ayant l'identité comme élément neutre.*

Démonstration. On peut appliquer le Lemme 1.23 avec $E = \mathbb{R}^2$ et G l'ensemble des transformations euclidiennes. Par l'Exemple 1.9, la composition est bien une opération interne. L'identité est bien sûr une transformation euclidienne. Enfin, par le Lemme 1.20, l'inverse d'une transformation euclidienne est aussi une transformation euclidienne. Les trois conditions du Lemme 1.23 sont donc satisfaites, ce qui nous permet de conclure que l'ensemble des transformations euclidiennes muni de l'opération de composition est bien un groupe. \square

Ce théorème est la manifestation d'un principe général : les symétries d'un espace muni de certaines structures (e.g. \mathbb{R}^2 muni de la distance euclidienne), autrement dit les transformations de cet espace préservant ces structures, forment un groupe en utilisant l'opération de composition. Plus il y a de structures à préserver, plus le groupe des transformations sera petit. Inversement, moins il y aura de structures à préserver, plus le groupe des transformations sera grand. Dans le prochain chapitre, c'est la direction que nous allons explorer. Nous allons élargir le groupe des transformations euclidiennes, ce qui géométriquement correspondra à munir \mathbb{R}^2 d'une structure moins fine que celle induite par la distance euclidienne.

1.4 Problèmes

Problème 1.1. Soit L la droite de \mathbb{R}^2 donnée par

$$L = \{(3t - 4, -t - 1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

- Trouver des nombres réels m et b de sorte que L a pour équation $y = mx + b$.
- Trouver $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}$ de sorte que L a pour équation $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = k$.
- Trouver le point de la droite L le plus proche de l'origine.
- Trouver des nombres réels m' et b' tels que la droite L' , obtenue en appliquant une rotation d'un angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'origine dans le sens anti-horaire à la droite L , a pour équation $y = m'x + b'$.

Problème 1.2. Soit \mathcal{D} un cercle de centre O et soient A , B et C des points distincts sur le cercle. Montrer que l'angle $\angle ACB$ est égal à la moitié de l'angle $\angle AOB$.

Problème 1.3. Soit AB un segment. Soit \mathcal{D} le cercle de diamètre AB . Montrer que $\mathcal{D} \setminus \{A, B\}$ correspond à l'ensemble des points C tels que ABC est un triangle rectangle ayant AB pour hypoténuse.

Problème 1.4. Soit \mathbf{A} la rotation d'un angle θ autour de l'origine dans le sens anti-horaire et \mathbf{S} la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$.

- Trouver la matrice \mathbb{S} associée à \mathbf{S} dans la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.
- Trouver la matrice \mathbb{M} associée à la transformation orthogonale $\mathbf{A} \circ \mathbf{S}$ dans la base canonique.

- c) Déterminer les valeurs propres de \mathbb{M} .
- d) Déterminer les vecteurs propres correspondants.
- e) Montrer que la matrice \mathbb{M} correspond à la réflexion par rapport à la droite L d'équation :

$$(\cos \theta)x + (\sin \theta - 1)y = 0.$$

- f) Vérifier que $\mathbb{M}^2 = \mathbb{I}$, où \mathbb{I} est l'identité, ce qui correspond géométriquement au fait qu'une réflexion est toujours son propre inverse.

Problème 1.5. Donner un exemple d'une transformation euclidienne qui ne préserve pas le produit scalaire.

Problème 1.6. Donner un exemple de deux transformations euclidiennes qui ne commutent pas lorsqu'on les compose.

Problème 1.7. On dénote par $O(2)$ l'ensemble des transformations orthogonales $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Montrer que $O(2)$ est un groupe lorsqu'on utilise la composition comme opération interne.

Problème 1.8. Mettre sous la forme $t(\vec{r}) = \mathbf{A}\vec{r} + \vec{b}$ pour $\mathbf{A} \in O(2)$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ la transformation euclidienne $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par :

- a) une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens anti-horaire autour du point $(3, 1) \in \mathbb{R}^2$;
- b) une réflexion par rapport à la droite L d'équation $y = 2x + 1$.

Problème 1.9. Soit $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application orthogonale et \mathbb{A} la matrice correspondante par rapport à la base canonique.

- a) Montrer que $\det(\mathbb{A}) \in \{-1, 1\}$.
- b) Si $\det(\mathbb{A}) = 1$, montrer que \mathbf{A} est une rotation autour de l'origine. Indice : Est-ce que la base orthonormale $\{\mathbf{A}\vec{i}, \mathbf{A}\vec{j}\}$ induit la même orientation que la base canonique ?
- c) On dénote par $SO(2)$ l'ensemble des rotations autour de l'origine dans \mathbb{R}^2 . Montrer que $SO(2)$ muni de l'opération de composition est un groupe.
- d) Si plutôt $\det(\mathbb{A}) = -1$, montrer que \mathbf{A} est une réflexion par rapport à l'origine. Indice : Utiliser le Problème 1.7 et considérer la matrice $\mathbb{A} \circ \mathbb{S}$, où \mathbb{S} est la réflexion du numéro précédent.

Problème 1.10. Montrer qu'une rotation est la composée de deux réflexions.

Problème 1.11. Montrer qu'une translation de \mathbb{R}^2 est la composée de deux réflexions.

Problème 1.12. Montrer qu'une bijection $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une transformation euclidienne si et seulement si elle est la composée d'un nombre fini de réflexions.

Problème 1.13. Soit L une droite de \mathbb{R}^2 et soit G l'ensemble des transformations euclidiennes qui envoient la droite L sur elle-même. Autrement dit, une transformation euclidienne t est un élément de G si $t(L) = L$. Montrer que G , muni de l'opération de composition, est un groupe.

2 Géométrie affine



Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les transformations de \mathbb{R}^2 préservant la distance forment un groupe. Au lieu de regarder les transformations qui préservent la distance, on aurait pu regarder celles qui préservent la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire les applications linéaires inversibles $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ces transformations forment aussi un groupe, mais ne contiennent pas toutes les transformations euclidiennes, en particulier les translations, puisqu'elles déplacent l'origine et ne sont donc pas linéaires. Pour que les translations restent incluses dans notre groupe de transformation, on peut toutefois regarder \mathbb{R}^2 comme un espace vectoriel pour lequel on omettrait de spécifier l'origine. Envisagé de ce point de vue, \mathbb{R}^2 est ce qu'on appelle un **espace affine**. Autrement dit, un espace affine est un espace qui acquiert une structure d'espace vectoriel dès qu'on lui spécifie une origine.

2.1 Les transformations affines

Les transformations préservant la structure d'espace affine de \mathbb{R}^2 sont les suivantes.

Définition 2.1. Une **transformation affine** de \mathbb{R}^2 est une application $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme

$$t(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2,$$

où $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire inversible et $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 2.2. Une transformation euclidienne est une transformation affine, car une application orthogonale est en particulier une application linéaire inversible. Le contraire n'est pas vrai toutefois.

Théorème 2.3. *L'ensemble des transformations affines forme un groupe en utilisant comme opération la composition d'applications.*

Démonstration. Dans un premier temps, vérifions que la composition de deux transformations affines donne bien à nouveau une transformation affine. Soient $t_1(\vec{x}) = \mathbf{A}_1\vec{x} + \vec{b}_1$ et $t_2(\vec{x}) = \mathbf{A}_2\vec{x} + \vec{b}_2$ deux transformations affines. Alors leur composée est donnée par

$$\begin{aligned} t_1 \circ t_2(\vec{x}) &= t_1(\mathbf{A}_2\vec{x} + \vec{b}_2) = \mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2\vec{x} + \vec{b}_2) + \vec{b}_1 \\ &= \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2(\vec{x}) + (\mathbf{A}_1\vec{b}_2 + \vec{b}_1), \quad \text{par linéarité de } \mathbf{A}_1, \\ &= \mathbf{A}_3\vec{x} + \vec{b}_3 \quad \text{avec } \mathbf{A}_3 := \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2, \quad \vec{b}_3 := \mathbf{A}_1\vec{b}_2 + \vec{b}_1. \end{aligned}$$

Comme $\vec{b}_3 \in \mathbb{R}^2$ et que $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, en tant que composée de deux applications linéaires inversibles, est inversible, cela montre que $t_1 \circ t_2$ est bien une transformation affine. Clairement, l'application identité est une transformation affine. Enfin, si $t(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}$ est une transformation affine, alors son application inverse est donnée par l'application affine

$$t^{-1}(\vec{x}) := \mathbf{A}^{-1}\vec{x} - \mathbf{A}^{-1}\vec{b},$$

puisque

$$t^{-1} \circ t(\vec{x}) = t^{-1}(\mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}) - \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \vec{x}$$

et

$$t \circ t^{-1}(\vec{x}) = t(\mathbf{A}^{-1}\vec{x} - \mathbf{A}^{-1}\vec{b}) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\vec{x} - \mathbf{A}^{-1}\vec{b}) + \vec{b} = \vec{x}.$$

Par le Lemme 1.23, cela montre que les transformations affines forment bien un groupe. \square

Établissons quelques propriétés géométriques élémentaires des transformations affines.

Proposition 2.4. *Une transformation affine envoie une droite sur une droite.*

Démonstration. Soit L une droite de \mathbb{R}^2 . Alors il existe $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = k\}.$$

En effet, on peut choisir \vec{n} un vecteur non nul tel que $\frac{k}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \in L$ et tel que la droite

$$L' = \{\lambda\vec{n} \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

est orthogonale à L . Par exemple, si $y = mx + b$ est l'équation de notre droite, on peut

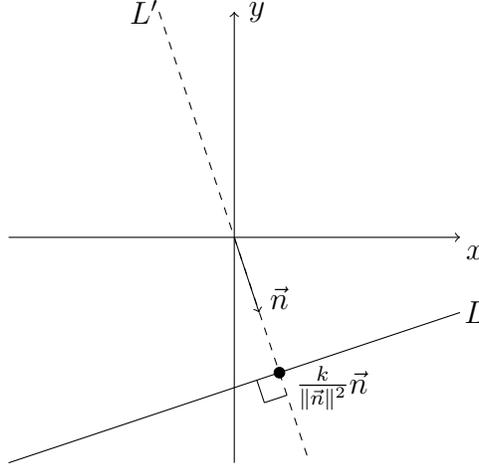


FIGURE 8 – La droite L

prendre $\vec{n} = (m, -1)$ et $k = -b$, car pour $\vec{x} = (x, y)$, on a que

$$\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = k \iff mx - y = -b \iff y = mx + b.$$

Soit aussi t une transformation affine de la forme $t\vec{r} = \mathbf{A}\vec{r} + \vec{b}$ pour \mathbf{A} une application linéaire inversible et $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Alors sous l'action de t , la droite devient

$$\begin{aligned} t(L) &= t(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = k\}) = \{t(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = k\}, \\ &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle t^{-1}(\vec{x}), \vec{n} \rangle = k\} \\ &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{A}^{-1}\vec{x} - \mathbf{A}^{-1}\vec{b}, \vec{n} \rangle = k\} \\ &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{x} - \vec{b}, (\mathbf{A}^{-1})^T \vec{n} \rangle = k\} \\ &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{x}, (\mathbf{A}^{-1})^T \vec{n} \rangle = k + \langle \vec{b}, (\mathbf{A}^{-1})^T \vec{n} \rangle\} \\ &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{x}, \vec{n}' \rangle = k'\} \end{aligned}$$

avec $\vec{n}' := (\mathbf{A}^{-1})^T \vec{n}$ et $k' := k + \langle \vec{b}, (\mathbf{A}^{-1})^T \vec{n} \rangle$. Comme $(\mathbf{A}^{-1})^T$ est aussi une application linéaire inversible, \vec{n}' est vecteur non nul et $t(L)$ est donc bien une droite. \square

Proposition 2.5. *Une transformation affine envoie des droites se coupant sur des droites se coupant et des droites parallèles sur des droites parallèles.*

Démonstration. Soient L_1 et L_2 des droites se coupant en P et $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une transformation affine. Alors $t(L_1)$ et $t(L_2)$ sont des droites par la Proposition 2.4 et clairement elle se coupent en $t(P)$. Si plutôt L_1 et L_2 sont des droites parallèles, supposons pour une contradiction que $t(L_1)$ et $t(L_2)$ ne sont pas parallèles. Dans ce cas, il existe un point $P \in \mathbb{R}^2$ où elles se coupent. Or, comme t^{-1} est aussi une transformation affine, il faut alors par le résultat précédent que $t^{-1}(P)$ soit un point appartenant aux droites $L_1 = t^{-1} \circ t(L_1)$ et $L_2 = t^{-1} \circ t(L_2)$, contredisant notre hypothèse que L_1 et L_2 sont parallèles. Pour éviter une contradiction, il faut donc admettre que $t(L_1)$ et $t(L_2)$ sont bien parallèles. \square

Proposition 2.6. *Une transformation affine préserve les rapports de longueurs le long d'une droite.*

Démonstration. Soient L une droite, \vec{x}_1 , \vec{x}_2 et \vec{x}_3 trois points distincts sur cette droite et $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une transformation affine. Les translations sont des isométries, donc préservent les longueurs et a fortiori les rapports de longueurs le long d'une droite. En composant à gauche et à droite par des translations, on peut donc se ramener au cas où $\vec{x}_1 = \vec{0}$ avec t de la forme

$$t(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$$

pour \mathbf{A} une application linéaire inversible. Comme L passe par l'origine, que $\vec{x}_1 = \vec{0}$ et que \vec{x}_2 et \vec{x}_3 sont des points distincts de cette droite, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\vec{x}_2 = \lambda\vec{x}_3$$

et $|\lambda|$ est le rapport entre les longueurs $d(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$ et $d(\vec{x}_3, \vec{x}_1)$. Sous l'action de t , ce rapport devient

$$\begin{aligned} \frac{d(t(\vec{x}_2), t(\vec{x}_1))}{d(t(\vec{x}_3), t(\vec{x}_1))} &= \frac{d(t(\vec{x}_2), \vec{0})}{d(t(\vec{x}_3), \vec{0})} = \frac{\|t(\vec{x}_2)\|}{\|t(\vec{x}_3)\|} = \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}_2\|}{\|\mathbf{A}\vec{x}_3\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{A}(\lambda\vec{x}_3)\|}{\|\mathbf{A}\vec{x}_3\|} = \frac{\|\lambda\mathbf{A}\vec{x}_3\|}{\|\mathbf{A}\vec{x}_3\|}, \quad \text{par linéarité de } \mathbf{A}, \\ &= |\lambda| \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}_3\|}{\|\mathbf{A}\vec{x}_3\|} = |\lambda|, \quad \text{car } \|\cdot\| \text{ est une norme,} \\ &= \frac{d(\vec{x}_2, \vec{x}_1)}{d(\vec{x}_3, \vec{x}_1)}. \end{aligned}$$

Une transformation affine préserve donc bien les rapports de longueurs le long d'une droite. \square

Cependant, les transformations affines ne préserve pas en général la distance entre deux points ou l'angle entre deux droites. C'est une conséquence du résultat suivant.

Théorème 2.7 (Théorème fondamental de la géométrie affine). *Soient $\vec{p}_1, \vec{q}_1, \vec{r}_1 \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{p}_2, \vec{q}_2, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^2$ deux triplets de points qui ne sont pas colinéaires. Alors il existe une unique transformation affine envoyant $\vec{p}_1, \vec{q}_1, \vec{r}_1$ sur $\vec{p}_2, \vec{q}_2, \vec{r}_2$.*

Démonstration. On peut voir dans un premier temps qu'il existe une unique transformation affine t_1 envoyant $\vec{0} = (0, 0)$, $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$ sur $\vec{p}_1, \vec{q}_1, \vec{r}_1$. En effet, si $t_1(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}$ est une telle transformation, alors forcément $\vec{b} = t_1(\vec{0}) = \vec{p}_1$ et \mathbf{A} est l'unique application linéaire telle que

$$\mathbf{A}\vec{i} = \vec{q}_1 - \vec{p}_1, \quad \mathbf{A}\vec{j} = \vec{r}_1 - \vec{p}_1.$$

Comme $\vec{p}_1, \vec{q}_1, \vec{r}_1$ ne sont pas colinéaires, les vecteurs $\vec{q}_1 - \vec{p}_1$ et $\vec{r}_1 - \vec{p}_1$ sont linéairement indépendants, ce qui assure que \mathbf{A} est bien une application inversible et que t_1 est bien une transformation affine.

De même, il existe une unique transformation affine t_2 envoyant $\vec{0}, \vec{i}$ et \vec{j} sur \vec{p}_2, \vec{q}_2 et \vec{r}_2 . Par construction, la transformation affine $t = t_2 \circ t_1^{-1}$ envoie alors $\vec{p}_1, \vec{q}_1, \vec{r}_1 \in \mathbb{R}^2$ sur $\vec{p}_2, \vec{q}_2, \vec{r}_2$.

Pour montrer que t est unique, soit s une autre application affine envoyant $\vec{p}_1, \vec{q}_1, \vec{r}_1$ sur $\vec{p}_2, \vec{q}_2, \vec{r}_2$. Dans ce cas, $s \circ t_1$ et $t \circ t_1$ sont deux transformations affines envoyant $\vec{0}, \vec{i}$, et \vec{j} sur

$\vec{p}_2, \vec{q}_2, \vec{r}_2$. Or, par la discussion précédente, t_2 est l'unique transformation affine ayant cette propriété. Il faut donc que

$$s \circ t_1 = t \circ t_1 = t_2 \implies s = t = t_2 \circ t_1^{-1}.$$

□

Corollaire 2.8. *En géométrie affine, tous les triangles sont équivalents.*

Corollaire 2.9. *Il existe des transformations affines qui ne préservent pas les distances ou les angles.*

2.2 Quelques résultats classiques de géométrie affine

Par le Corollaire 2.9, puisque les Propositions 1.1, 1.2 et 1.3 du chapitre précédent font intervenir des longueurs ou des angles, elles n'ont pas de sens en géométrie affine et sont propres à la géométrie euclidienne. Cependant, le Théorème de Thalès (Proposition 1.5) peut être considéré comme un résultat de géométrie affine, puisqu'il ne fait intervenir que des droites, des rapports de longueurs et la notion de droites parallèles, toutes des notions ou des quantités préservées par les transformations affines.

Exercice 2.10. Donner une autre démonstration du théorème de Thalès en se ramenant au cas plus symétrique et plus simple où le triangle ABC de la Figure 5 est un triangle équilatéral.

Un autre beau résultat de géométrie ne faisant intervenir que des propriétés affines est le théorème des médianes.

Théorème 2.11 (Théorème des médianes). *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.*

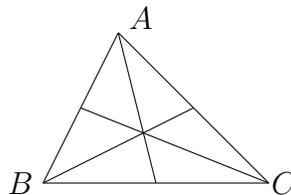


FIGURE 9 – Le théorème des médianes

Démonstration. Rappelons qu'une **médiane** d'un triangle est une droite passant par l'un de ses sommets et le milieu du côté opposé. Cette définition ne faisant intervenir que des rapports de longueurs sur les côtés du triangle, on voit qu'une transformation affine t envoie les médianes d'un triangle $\triangle ABC$ sur les médianes du triangle $t(\triangle ABC)$. Par le théorème fondamental de la géométrie affine, quitte à appliquer une transformation affine, on peut donc se ramener au cas où le triangle ABC est équilatéral. Dans ce cas, le triangle est symétrique par rapport à la médiane AP , autrement dit il demeure inchangé sous l'action de la réflexion par rapport à la droite AP . Par symétrie, les deux autres médianes doivent donc forcément se couper sur la droite AP .

□

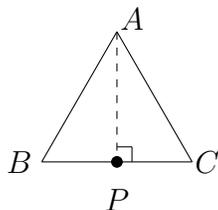


FIGURE 10 – Cas où le triangle est équilatéral

Un autre résultat important de géométrie affine est le théorème de Ceva. Il doit son nom au mathématicien italien Giovanni Ceva qui l'a démontré en 1678. Cependant, le théorème avait déjà été démontré à fin du XI^e siècle par al-Mutaman, roi de Saragosse, dans son **livre de perfection** dont le texte a été redécouvert en 1985.

Théorème 2.12 (Ceva, al-Mutaman). *Soit $\triangle ABC$ un triangle et soit X un point n'appartenant pas aux droites prolongées AB , CB et AC . Si AX coupe BC en P , BX coupe CA en Q et CX coupe AB en R , alors*

$$\left(\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}\right) \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right) \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\right) = 1.$$

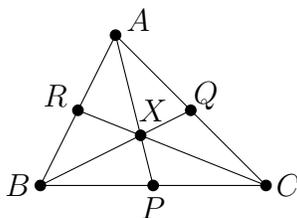


FIGURE 11 – Le théorème de Ceva

Démonstration. Comme l'énoncé ne fait intervenir que des rapports de longueurs le long de droites, il est invariant sous l'action d'une transformation affine. Par le théorème fondamental de la géométrie affine, on peut donc se ramener au cas d'un triangle rectangle isocèle. Plus spécifiquement, on peut supposer que $A = (0, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (1, 0)$ et $X = (u, v)$. Puisque X n'appartient pas aux droites AB , AC et BC , remarquons que forcément

$$u \neq 0, \quad v \neq 0 \quad \text{et} \quad u + v \neq 1.$$

De plus, comme AX coupe BC en P , ces deux droites ne sont pas parallèles, ce qui implique que $v \neq 1$. De façon similaire, le fait que CX et AB se coupent implique que $u \neq 1$, alors que l'hypothèse que BX coupe AC implique que $u + v \neq 1$. Il suffit alors de faire un petit calcul d'algèbre linéaire. D'abord, AX a pour équation

$$y = \frac{v-1}{u}x + 1,$$

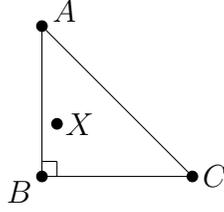


FIGURE 12 – Cas d'un triangle rectangle isocèle

donc

$$\begin{aligned}
 y = 0 &\implies x = \frac{u}{1-v} \implies P = \left(\frac{u}{1-v}, 0\right) \\
 &\implies \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \left| \frac{\frac{u}{1-v}}{1 - \frac{u}{1-v}} \right| = \left| \frac{u}{1-v-u} \right|.
 \end{aligned}$$

De même, la droite CX a pour équation

$$y = \frac{-v}{1-u}x + \frac{v}{1-u},$$

donc

$$\begin{aligned}
 x = 0 &\implies y = \frac{v}{1-u} \implies R = \left(0, \frac{v}{1-u}\right) \\
 &\implies \left| \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \right| = \left| \frac{\frac{v}{1-u} - 1}{-\frac{v}{1-u}} \right| = \left| \frac{1-u-v}{v} \right|.
 \end{aligned}$$

Enfin, comme BX a pour équation $y = \frac{vx}{u}$ et que AC a pour équation $x + y = 1$, si le point Q où ces droites se coupent a pour coordonnées (x, y) , il faut que

$$\begin{aligned}
 y - \frac{vx}{u} = 0 &\implies y = \frac{vx}{u} \implies x = \frac{1}{1+\frac{v}{u}} = \frac{u}{u+v} \\
 x + y = 1 &\implies x + \frac{vx}{u} = 1 \implies y = \frac{v}{u} \frac{u}{u+v} = \frac{v}{u+v},
 \end{aligned}$$

de sorte qu'en utilisant le théorème de Thalès,

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \left| \frac{\frac{u}{u+v} - 1}{-\frac{u}{u+v}} \right| = \left| \frac{u - u - v}{-u} \right| = \left| \frac{v}{u} \right|. \quad (2.1)$$

Pour conclure, on a donc bien que

$$\left(\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \right) \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \right) \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \right) = \left| \left(\frac{1-u-v}{v} \right) \left(\frac{u}{1-v-u} \right) \left(\frac{v}{u} \right) \right| = |1| = 1.$$

□

Remarque 2.13. Même sans les valeurs absolues dans (2.1), on obtient 1. Cela provient du fait qu'on peut raffiner le théorème de Ceva en assignant des signes aux rapports $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}$, $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$, $\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}$: + si le point correspondant est sur le côté du triangle et – s'il est plutôt sur son prolongement. Cela montre que des trois points P , Q et R , soit les trois sont sur les côtés du triangle, soit un seul d'entre eux est sur l'un des côtés du triangles, les deux autres étant seulement sur le prolongement.

Remarque 2.14. On peut obtenir des cas dégénérés du théorème de Ceva en faisant tendre le point X vers l'infini, on encore vers une limite X' telle que AX' est parallèle à BC , BX' est parallèle à AC ou CX' est parallèle à AB , c'est-à-dire vers une limite telle que P, Q ou R tend vers l'infini.

La réciproque du théorème de Ceva, qui peut être vue comme une généralisation du théorème des médianes, est aussi vraie.

Théorème 2.15 (Réciproque du théorème de Ceva). *Soient P, Q et R des points distincts de A, B et C sur les côtés BC, AC et AB d'un triangle ABC . Si*

$$\left(\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}\right) \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right) \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\right) = 1,$$

alors les droites AP, BQ et CR sont concourantes.

Démonstration. Soit X le point où AP et CR se coupent. Soit Q' le point où BX et AC se coupent. Par le théorème de Ceva,

$$\left(\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}\right) \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right) \left(\frac{\overline{CQ'}}{\overline{Q'A}}\right) = 1.$$

Vu notre hypothèse sur Q , cela implique que $\frac{\overline{CQ'}}{\overline{Q'A}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}$, c'est-à-dire que $Q = Q'$. Donc $BQ = BQ'$ et les droites AP, BQ et CR sont donc concourantes. \square

Si on suppose seulement que les points P, Q et R sont sur les droites prolongées BC, AC et AB , on peut généraliser la réciproque du Théorème de Ceva de la manière suivante.

Théorème 2.16 (Version plus générale de la réciproque du Théorème de Ceva). *Soient P, Q et R des points distincts de A, B et C sur les droites prolongées BC, AC et AB d'un triangle ABC . Si*

$$\left(\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}\right) \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right) \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\right) = 1$$

avec la convention de signe de la Remarque 2.13, alors les droites AP, BQ et CR sont soit concourantes, soit deux à deux parallèles.

Démonstration. Si les droites ne sont pas toutes parallèles deux à deux, alors il faut montrer qu'elles sont concourantes. À tout le moins on sait alors que deux d'entre elles doivent se couper. Supposons sans perte de généralité que ce sont les droites AP et CR qui se coupent en un certain point X . Dans ce cadre plus général, la droite BX pourrait en principe être parallèle à AC . Si tel était le cas, on pourrait toutefois invoquer le théorème de Ceva, plus précisément une version dégénérée au sens de la Remarque 2.14 avec Q' vu comme un point à l'infini. Avec la convention de signe de la Remarque 2.13, on en déduirait que Q doit aussi être à l'infini, en contradiction avec notre hypothèse. Le fait que Q est un point sur la droite AC implique donc que BX coupe forcément AC . On peut ainsi procéder comme dans la preuve du Théorème 2.15 pour conclure que les droites AP, BQ et CR sont concourantes. \square

Remarque 2.17. Le cas où les droites sont parallèles deux à deux correspond au cas dégénéré du Théorème de Ceva obtenu en faisant tendre le point X vers l'infini.

En remplaçant le point X par une droite dans le théorème de Ceva, on obtient le théorème suivant, dû à Ménélaüs d'Alexandrie, un mathématicien grec ayant vécu au premier et deuxième siècle de notre ère.

Théorème 2.18 (Ménélaüs). *Soit ABC un triangle. Si L est une droite coupant les droites BC , AC et AB en des points distincts P , Q et R , alors*

$$\left(\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}\right) \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right) \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\right) = -1$$

en suivant la convention de signe de la Remarque 2.13.

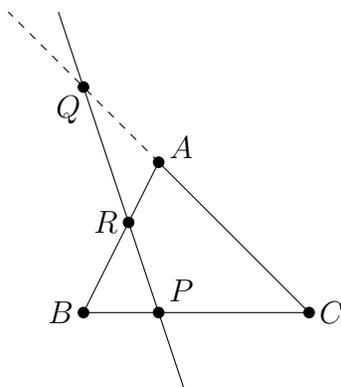


FIGURE 13 – Le théorème de Ménélaüs

Démonstration. Comme pour le théorème de Ceva, c'est un énoncé de géométrie affine. Par le théorème fondamental de la géométrie affine, quitte à appliquer une transformation affine, on peut donc se ramener au cas d'un triangle rectangle isocèle avec $A = (1, 0)$, $B = (0, 0)$ et $C = (1, 1)$. Comme P , Q et R sont distincts, remarquons d'abord que la droite L ne passe pas par A , B ou C . De plus, L coupe AB , AC et BC , donc n'est pas parallèle à ces droites. En particulier, L n'est ni verticale, ni horizontale, en fait d'équation

$$y = mx + b \quad \text{pour un certain } m \notin \{0, -1\}.$$

En termes de cette équation, cela veut dire que R a pour coordonnées $(0, b)$, donc $b \notin \{0, 1\}$ puisque R est distinct de A et B , P a pour coordonnées $(p, 0)$ avec p tel que

$$0 = mp + b \quad \implies \quad p = \frac{-b}{m},$$

donc $m + b \neq 0$ puisque $P \neq C$, et Q a pour coordonnées (q_1, q_2) avec q_1 et q_2 tels que

$$\begin{aligned} \begin{aligned} q_1 + q_2 &= 1 \\ mq_1 - q_2 &= -b \end{aligned} &\implies \begin{aligned} q_2 &= mq_1 + b \\ q_1 + (mq_1 + b) &= 1 \end{aligned} \\ &\implies \begin{aligned} q_1 &= \frac{1-b}{m+1} \\ q_2 &= \frac{m(1-b)}{m+1} + b = \frac{m(1-b) + (m+1)b}{m+1} = \frac{m+b}{m+1}. \end{aligned} \end{aligned}$$

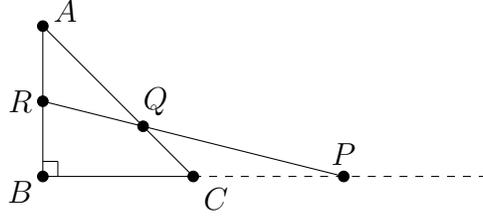


FIGURE 14 – Théorème de Ménélaiüs pour un triangle rectangle isocèle

Ainsi, on calcule que

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{b-1}{-b}, \quad \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{-\frac{b}{m}}{1 - (-\frac{b}{m})} = \frac{-b}{m+b},$$

alors que par le théorème de Thalès,

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \frac{q_1 - 1}{-q_1} = \frac{\frac{1-b}{m+1} - 1}{-\frac{1-b}{m+1}} = \frac{1-b-(m+1)}{b-1} = \frac{b+m}{1-b}.$$

Finalement, on obtient bien

$$\left(\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}\right) \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right) \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\right) = \left(\frac{b-1}{-b}\right) \left(\frac{-b}{m+b}\right) \left(\frac{b+m}{1-b}\right) = -1.$$

□

Comme pour le théorème de Ceva, le théorème de Ménélaiüs admet une réciproque.

Théorème 2.19 (Réciproque du théorème de Ménélaiüs). *Soient ABC un triangle et P , Q et R des points sur les droites prolongées BC , AC et AB . Si les points P , Q et R sont distincts des sommets A , B et C du triangle et si*

$$\left(\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}\right) \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right) \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\right) = -1 \tag{2.2}$$

en utilisant la convention de signes de la Remarque 2.13, alors les points P , Q et R sont colinéaires.

Démonstration. Considérons la droite QP . Si QP était parallèle à AB , alors par le théorème de Thalès, on aurait que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \implies \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{AQ}} = 1,$$

donc par l'équation (2.2) que $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = -1$, ce qui est impossible, puisque

$$\begin{aligned} \left|\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}\right| = 1 &\implies R \text{ est le point médian du segment } AB, \\ &\implies \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1. \end{aligned}$$

Pour éviter une contradiction, il faut donc admettre que QP coupe AB , disons en R' . Notons que R' ne peut pas être égal à A ou B , car autrement on aurait $A = R' = Q$ ou $R' = B = P$, contredisant notre hypothèse. Comme R' est sur la droite AB , il est aussi distinct de C . On peut donc appliquer le théorème de Ménélaüs, qui implique dans ce cas que

$$\left(\frac{\overline{AR'}}{\overline{R'B}}\right) \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right) \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\right) = -1.$$

En comparant avec (2.2), on obtient que

$$\frac{\overline{AR'}}{\overline{R'B}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \implies R = R',$$

donc P, Q et R sont bien colinéaires. □

2.3 Les coniques en géométrie affine

Géométriquement, une **conique** est une courbe obtenue en prenant l'intersection d'un cône avec un plan. La conique est dite **propre** si le plan coupant le cône ne contient pas le sommet du cône. Autrement, on dit que la conique est **dégénérée**. On distingue trois types de coniques propres selon les valeurs de l'angle d'inclinaison θ du plan par rapport à l'axe du cône et l'angle d'ouverture α du cône : Si $\theta < \alpha$, on obtient une **hyperbole**, si $\theta = \alpha$, c'est une **parabole** et si $\theta > \alpha$, c'est une **ellipse**.

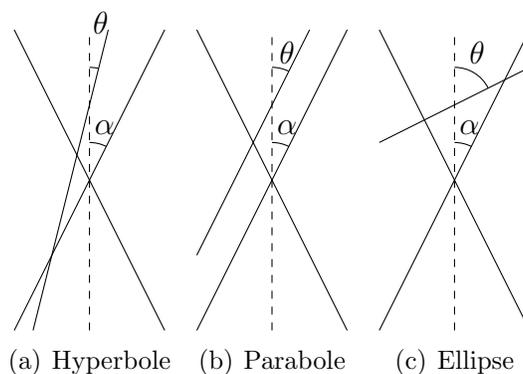


FIGURE 15 – Les trois types de coniques propres

Alternativement et comme Descartes et Fermat l'ont découvert, une conique correspond à l'ensemble \mathcal{C} des solutions d'une équation polynomiale de degré 2 dans \mathbb{R}^2 :

$$P(x, y) = 0 \quad \text{avec} \quad P(x, y) := Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H, \quad (2.3)$$

où A, B, C, F, G et H sont des nombres réels fixés. Sous cette forme, on peut montrer qu'une conique est propre pourvu que l'ensemble des solutions de l'équation (2.3) dans \mathbb{R}^2 ne soit pas vide et que le polynôme $P(x, y)$ ne se factorise pas en polynômes de degré 1 (en utilisant possiblement le corps des nombres complexes). Si la conique est propre, le polynôme ne peut donc pas en particulier être d'ordre 1.

Exemple 2.20. Si $P(x, y) = x^2 + y^2$, alors $P(x, y)$ admet la factorisation

$$P(x, y) = (x - iy)(x + iy).$$

La conique associée n'est donc pas propre. L'ensemble des solutions de l'équation (2.3) dans \mathbb{R}^2 n'est en fait constitué que d'un seul point, l'origine.

Une transformation affine $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ envoie une conique \mathcal{C} sur l'ensemble $t(\mathcal{C})$. Cet ensemble est à nouveau une conique, puisque

$$\begin{aligned} t(\mathcal{C}) &= t\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\} = \{t(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P \circ t^{-1}(x, y) = 0\} \end{aligned}$$

et qu'un petit calcul montre que $P \circ t^{-1}$ est aussi un polynôme d'ordre 2, voir l'Exercice 2.21 ci-bas. Si $P = P_1 P_2$ se factorise en deux polynômes d'ordre 1, remarquons qu'il en sera de même de $P \circ t = (P_1 \circ t)(P_2 \circ t)$, ce qui montre qu'une transformation affine envoie une conique dégénérée sur une conique dégénérée. Si \mathcal{C} est une conique propre, $t(\mathcal{C})$ est donc forcément aussi une conique propre, puisque si $t(\mathcal{C})$ était dégénérée, $\mathcal{C} = t^{-1}(t(\mathcal{C}))$ le serait aussi par l'argument qui précède.

L'équation (2.3) peut être mise sous la forme vectorielle

$$\langle \vec{r}, \mathbf{M}\vec{r} \rangle + \mathbf{N}\vec{r} + H = 0, \quad (2.4)$$

où $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{N} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont les applications linéaires induites par les matrices

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = (F \quad G) \quad \text{respectivement.}$$

Vue comme une matrice, l'application \mathbf{M} est symétrique au sens où $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$. Par un résultat d'algèbre linéaire I (MAT1250), ses valeurs propres sont donc réelles et elle possède une base orthonormale de vecteurs propres.

Exercice 2.21. Si $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une transformation affine de la forme $t(\vec{r}) = \mathbf{A}\vec{r} + \vec{b}$ et P est un polynôme de degré deux de la forme

$$P(\vec{r}) = \langle \vec{r}, \mathbf{M}\vec{r} \rangle + \mathbf{N}\vec{r} + H,$$

montrer que

$$P \circ t(\vec{r}) = \langle \vec{r}, \mathbf{M}'\vec{r} \rangle + \mathbf{N}'\vec{r} + H'$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &:= \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}, \\ \mathbf{N}'(\vec{r}) &:= \mathbf{N}(\mathbf{A}\vec{r}) + 2\langle \vec{b}, \mathbf{M}\mathbf{A}\vec{r} \rangle, \\ H' &:= H + (\mathbf{N}\vec{b}) + \langle \vec{b}, \mathbf{M}\vec{b} \rangle. \end{aligned}$$

À la lumière de cet exercice, on voit que quitte à utiliser une application orthogonale pour diagonaliser la matrice associée à \mathbf{M} , on peut supposer que

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Sous cette forme, l'équation devient

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + F'x + G'y + H = 0. \quad (2.5)$$

Supposons maintenant que la conique de l'équation (2.4) est propre, autrement dit que la conique spécifiée par l'équation (2.5) est propre. En particulier, pour que le polynôme à gauche de l'équation (2.5) ne soit pas de degré 1, il faut que $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. Puisque

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(\mathbb{M}) = AC - \frac{B^2}{4},$$

on voit que le signe du déterminant détermine le type de conique propre. On a une ellipse si $\det(\mathbb{M}) > 0$, une parabole si $\det(\mathbb{M}) = 0$ et une hyperbole si $\det(\mathbb{M}) < 0$. Dans les deux premiers cas, $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, donc on peut compléter les carrés, et en effectuant une translation, l'équation peut être mise sous la forme

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = H'.$$

De plus, $H' \neq 0$, car autrement la conique ne serait pas propre puisque le polynôme $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ se factorise en deux polynômes de degré 1 comme dans l'Exemple 2.20. Si on a une ellipse, les valeurs propres λ_1 et λ_2 ont le même signe. En multipliant l'équation par -1 si nécessaire, on peut alors supposer que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Comme on suppose que la conique est propre, l'ensemble des solutions dans \mathbb{R}^2 n'est pas vide, de sorte qu'il faut aussi que $H' > 0$. En utilisant la transformation affine donnée par

$$t(x, y) = \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{H'}} x, \sqrt{\frac{\lambda_2}{H'}} y \right),$$

on se ramène alors à l'équation du cercle unité centré à l'origine :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Si on a plutôt une hyperbole, alors λ_1 et λ_2 ont des signes différents. Quitte à possiblement multiplier au préalable l'équation par -1 , on peut utiliser la transformation affine donnée par

$$t(x, y) = \left(\sqrt{\frac{|\lambda_1|}{|H'|}} x, \sqrt{\frac{|\lambda_2|}{|H'|}} y \right),$$

pour se ramener à l'équation de l'hyperbole

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Enfin, si la conique est une parabole, alors $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, mais $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$. Supposons, quitte à interchanger x et y , que $\lambda_2 = 0$. En complétant le carré pour x , on se ramène alors à l'équation

$$\lambda_1 x^2 + G'y + H = 0.$$

Puisque la conique est propre, $G' \neq 0$, car autrement le polynôme se factoriserait. En appliquant une transformation affine, on peut donc se ramener à la parabole $y = x^2$. On a presque démontré le résultat suivant.

Théorème 2.22. *En géométrie affine, toutes les ellipses sont équivalentes entre elles, toutes les paraboles sont équivalentes entre elles et toutes les hyperboles sont équivalentes entre elles. D'autre part, ces trois types de coniques propres sont distincts du point de vue de la géométrie affine.*

Démonstration. Il reste à montrer que les trois types de coniques propres sont distincts du point de vue de la géométrie affine. Puisque le signe

$$\text{signe}(\det(\mathbb{M})) = \begin{cases} +, & \det(\mathbb{M}) > 0, \\ 0, & \det(\mathbb{M}) = 0, \\ -, & \det(\mathbb{M}) < 0, \end{cases}$$

de $\det(\mathbb{M})$ dans l'équation de la conique détermine son type, il suffit de vérifier que ce signe est préservé par une transformation affine. Si \mathcal{C} est une conique d'équation

$$P(\vec{r}) = \langle \vec{r}, \mathbf{M}\vec{r} \rangle + \mathbf{N}\vec{r} + H = 0$$

et si t est une transformation affine de la forme $t(\vec{r}) = \mathbf{A}\vec{r} + \vec{b}$, $t(\mathcal{C})$ est la conique d'équation

$$P \circ t^{-1}(\vec{r}) = P(t^{-1}(\vec{r})) = 0.$$

Or, comme $t^{-1}(\vec{r}) = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} - \mathbf{A}^{-1}\vec{r}$, l'Exercice 2.21 montre que $P(t^{-1}(\vec{r}))$ est de la forme

$$P(t^{-1}(\vec{r})) = \langle \vec{r}, \mathbf{M}'\vec{r} \rangle + \mathbf{N}'\vec{r} + H' = 0$$

avec \mathbf{M}' l'application linéaire induite par la matrice $\mathbb{M}' = (\mathbb{A}^{-1})^T \mathbb{M} \mathbb{A}^{-1}$, \mathbb{A} étant la matrice induite par l'application linéaire \mathbf{A} . En particulier, en utilisant les propriétés du déterminant, on voit que

$$\det(\mathbb{M}') = \frac{\det(b)}{(\det(\mathbb{A}))^2}$$

a bien le même signe que $\det(\mathbb{M})$ puisque $\det(\mathbb{A})^2 > 0$. □

Le centre d'une ellipse semble a priori une notion de géométrie euclidienne, mais il est possible en fait d'en donner une définition strictement en termes affines.

Définition 2.23. Le **centre** d'une ellipse est l'unique point O tel que toute droite passant par celui-ci coupe l'ellipse en deux points formant un segment dont O est le point médian.

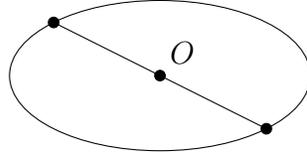


FIGURE 16 – Centre d’une ellipse

Dans le cas du cercle unité centré à l’origine, l’existence et l’unicité du centre sont automatiques. Comme la définition ne fait intervenir que des notions affines, cela implique par le Théorème 2.22 que toute ellipse possède bien un unique centre. Ces observations nous permettent de démontrer les deux Corollaires suivants.

Corollaire 2.24. *Soit ℓ une corde d’une ellipse. Alors les points médians des cordes parallèles à ℓ sont sur un diamètre de l’ellipse, c’est-à-dire sur une corde passant par le centre de l’ellipse.*

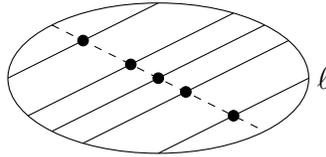


FIGURE 17 – Ellipse avec des cordes parallèles

Démonstration. Comme l’énoncé ne fait intervenir que des propriétés affines, quitte à appliquer une transformation affine, on peut se ramener au cas d’un cercle, un cadre où le résultat est trivial.

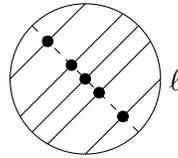


FIGURE 18 – Cercle avec des cordes parallèles

□

Corollaire 2.25. *Soit ℓ un diamètre d’une ellipse. Alors il y a un autre diamètre m tel que :*

1. *les points médians des cordes parallèles à m sont sur ℓ ;*
2. *les points médians des cordes parallèles à ℓ sont sur m .*

Démonstration. À nouveau, on peut se ramener au cas d’un cercle, cadre dans lequel m est simplement le diamètre perpendiculaire à ℓ .

□

2.4 Problèmes

Problème 2.1. Donner un exemple explicite d'une transformation affine qui ne préserve pas les angles et les longueurs.

Problème 2.2. Montrer qu'une transformation affine envoie un parallélogramme sur un parallélogramme.

Problème 2.3. En utilisant le Problème 2.2, montrer qu'une transformation affine préserve les rapports de longueurs le long de droites parallèles.

Problème 2.4. (Théorème de van Aubel) Soit X un point à l'intérieur d'un triangle $\triangle ABC$. Supposons que AX coupe BC en P , BX coupe AC en Q et CX coupe AB en R . Montrer que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XP}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} + \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}.$$

Problème 2.5. Soit ABC un triangle et X un point qui n'est sur aucune des droites prolongées AB , AC et BC . Supposons que AX coupe BC en P , BX coupe AC en Q et CX coupe AB en R .

a) Si

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} = \frac{1}{4},$$

quelle est la valeur du rapport $\frac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}$?

b) Supposons aussi que RQ coupe BC en L . Trouver une expression pour le rapport $\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}$ en termes du rapport $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$. Indice : Utiliser le théorème de Ceva avec le point X et le théorème de Ménélaüs avec la droite RQ .

c) Supposons aussi que PR coupe CA en M et que PQ coupe BA en N . Montrer que L , M et N sont colinéaires.

Problème 2.6. Soient \mathcal{C} une conique propre d'équation $P(x, y) = 0$ et L une droite donnée par

$$L := \{\vec{v} + \lambda\vec{w} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \text{pour } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \vec{w} \neq \vec{0}.$$

a) Si $Q = (x_0, y_0)$ appartient à L et à \mathcal{C} , montrer que L est tangente à \mathcal{C} en Q si et seulement si

$$\langle \vec{w}, \nabla P(x_0, y_0) \rangle = 0,$$

où $\nabla P(x, y) := \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right)$ est le gradient de P en (x, y) .

b) Si $\vec{0} \in \mathcal{C}$, montrer que $P(x, y)$ est de la forme

$$P(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy$$

et que $\nabla P(0, 0) = (F, G)$.

- c) Si $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une transformation affine et que L est tangente à \mathcal{C} en Q , montrer que $t(L)$ est tangente à $t(\mathcal{C})$ en $t(Q)$. Indice : L'idée est d'utiliser les formules obtenues dans l'Exercice 2.21. Comme le résultat est clairement vrai lorsque t est une translation, quitte à composer t par des translations à gauche et à droite, on peut se ramener au cas où $Q = \vec{0}$ est l'origine et t est une application linéaire inversible, ce qui simplifie les calculs.
- d) Si \mathcal{C} est une ellipse, alors soit L est disjointe de \mathcal{C} , soit L coupe \mathcal{C} en deux points ou encore soit L est tangente à \mathcal{C} en un point. Utiliser ce fait pour montrer d'une autre manière qu'une transformation affine envoie une droite tangente à une ellipse sur une droite tangente à une ellipse.

Problème 2.7. Donner une définition affine du centre d'une hyperbole. Pour toute hyperbole, montrer que le centre existe et est unique.

Problème 2.8. Donner un exemple d'une transformation affine autre que l'identité ou une réflexion qui envoie l'ellipse \mathcal{E} d'équation

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

sur elle-même.

Problème 2.9. Une ellipse est tangente aux côtés AB , BC , CD et DA d'un parallélogramme $ABCD$ aux points P, Q, R, S respectivement. Montrer que $\frac{CQ}{QB} = \frac{CR}{RP}$.

Problème 2.10. On considère le plan $\Pi_{z=1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ dans \mathbb{R}^3 . Soit $\mathbf{M} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire inversible.

- a) Montrer que \mathbf{M} envoie le plan $\Pi_{z=1}$ sur lui-même si et seulement si la matrice \mathbb{M} associée à \mathbf{M} est de la forme

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbb{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad \det(\mathbb{A}) \neq 0.$$

- b) Si \mathbf{M} envoie le plan $\Pi_{z=1}$ sur lui-même, montrer que \mathbf{M} induit une transformation affine de $\Pi_{z=1}$ lorsque celui-ci est identifié avec \mathbb{R}^2 via l'identification

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Pi_{z=1} \\ (x, y) &\mapsto (x, y, 1). \end{aligned}$$

Autrement dit, si \mathbf{M} envoie le plan $\Pi_{z=1}$ sur lui-même, montrer que l'application $\psi^{-1} \circ \mathbf{M} \circ \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une transformation affine.

- c) Montrer que muni de l'opération de composition, l'ensemble des applications linéaires inversibles $\mathbf{K} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ envoyant le plan $\Pi_{z=1}$ sur lui-même est un groupe.

Problème 2.11. Soit $ABCD$ un parallélogramme dans le plan \mathbb{R}^2 . Montrer qu'il existe une ellipse \mathcal{E} tangente aux points médians de chacun des côtés de ce parallélogramme.

Problème 2.12. Soient ABC un triangle et DE une droite coupant les segments AB et AC en D et E respectivement, de sorte que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \alpha \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

pour un certain $0 < \alpha < 1$.

- a) Montrer que la droite DE n'est pas parallèle à la droite BC .
- b) Si F est le point où les droites DE et BC se coupent et si $\overline{BF} > \overline{CF}$, déterminer \overline{CF} en termes de \overline{BC} et α .

3 Géométrie projective



La perspective, qui dérive du mot latin *perspicere* signifiant «regarder à travers», «regarder attentivement», est l'art, la technique de la représentation en deux dimensions, sur une surface plane, d'objets tridimensionnels tels qu'ils apparaissent vus à une certaine distance et d'un certain point de vue. Le principe de base développé par Alberti au XV^e siècle dans son ouvrage *Trattato della pittura* est le suivant. Ce que l'oeil voit, ce sont les rayons lumineux provenant de chaque point de la scène observée. Pour obtenir une image sur un écran, il suffit de tracer des droites joignant le point d'observation aux points de la scène observée. Les endroits où ces droites coupent l'écran indiquent où les points de la scène doivent être dépeints.

En changeant de point d'observation ou en changeant l'écran de position, on obtient une autre image de la même scène tridimensionnelle. Par exemple, ce qui, sur un écran, donne un cercle, pourra sur un autre écran donné une ellipse. Quelles sont les propriétés de l'image qui sont préservées par de tels changements ? Cette question est en quelque sorte à l'origine de la géométrie projective, qui a pour but l'étude de ces propriétés géométriques préservées par de tels changements. Avant d'aller plus, formalisons mathématiquement ce qu'on entend

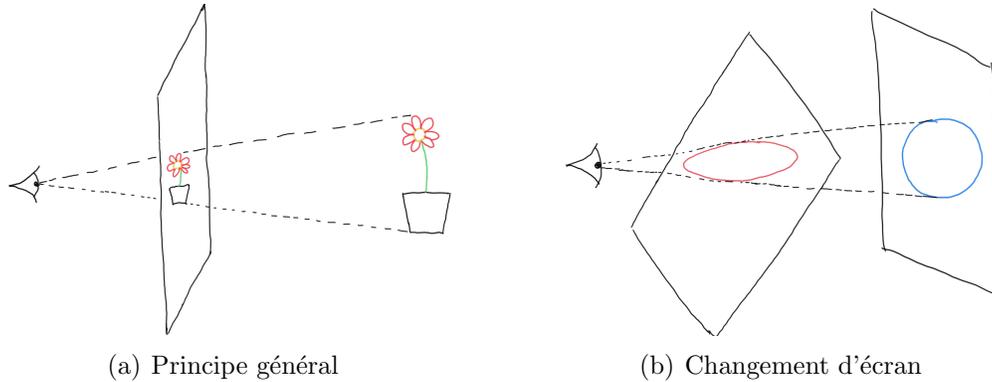


FIGURE 19 – Projection sur un écran

par un changement de perspective.

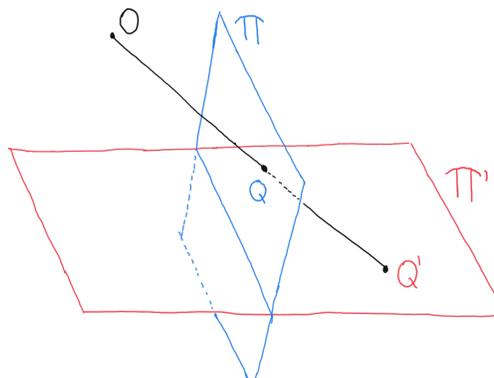


FIGURE 20 – Changement de perspective basé en O de Π vers Π'

Définition 3.1. Soient Π et Π' deux plans distincts de \mathbb{R}^3 et $O \in \mathbb{R}^3$ un point n'appartenant ni à Π , ni à Π' . Le **changement de perspective** basé en O de Π vers Π' est l'application $p : \Pi \rightarrow \Pi'$ qui à $Q \in \Pi$ associe le point $Q' \in \Pi'$ où la droite OQ coupe le plan Π' .

3.1 Le plan projectif réel

Supposons qu'il y ait un observateur situé à l'origine $O = (0, 0, 0)$ dans \mathbb{R}^3 . Lorsqu'on projette sur un écran par rapport à cet observateur, on ne peut pas distinguer deux points qui sont situés sur une même droite passant par l'origine. Cette observation suggère la définition suivante.

Définition 3.2. Le **plan projectif réel**, dénoté \mathbb{RP}^2 , est l'espace des droites de \mathbb{R}^3 passant par l'origine. Autrement dit, un **point** de \mathbb{RP}^2 est par définition une droite de \mathbb{R}^3 passant par l'origine.

Si $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est la sphère unité centrée à l'origine dans \mathbb{R}^3 , alors chaque droite passant par l'origine coupe la sphère \mathbb{S}^2 en exactement deux points. Si

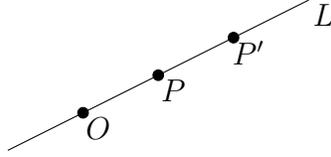


FIGURE 21 – On ne peut distinguer les points P et P' lorsqu'on projette par rapport à O

$\vec{r} \in \mathbb{S}^2$ est l'un de ces points, alors l'autre point est le point opposé $-\vec{r}$. De ce point de vue, un point du plan projectif réel peut être vu comme une paire de points opposés $\{\vec{r}, -\vec{r}\}$ sur la sphère \mathbb{S}^2 .

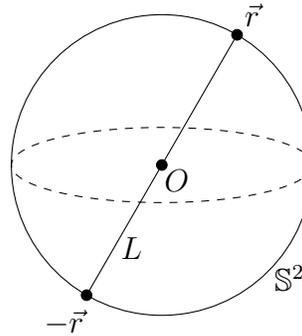


FIGURE 22 – Paire de points opposés sur la sphère \mathbb{S}^2

Le plan projectif contient aussi naturellement le plan affine. Plus précisément, considérons le plan

$$\Pi_{z=1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$$

qu'on peut identifier avec le plan affine \mathbb{R}^2 via la bijection $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x, y, 1) \in \Pi_{z=1}$. Le plan $\Pi_{z=1}$ peut alors être envoyé injectivement dans le plan projectif en associant à $P \in \Pi_{z=1}$ l'unique droite $L := OP$ passant par P et l'origine O . Clairement, cette application est injective, puisque L coupe $\Pi_{z=1}$ en P seulement. Cependant, l'application

$$\begin{aligned} \iota : \Pi_{z=1} &\rightarrow \mathbb{RP}^2 \\ P &\mapsto L = OP \end{aligned} \quad (3.1)$$

n'est pas surjective. En effet, les droites passant par l'origine qui sont parallèles au plan $\Pi_{z=1}$ ne sont pas dans l'image de cette application. Ces droites parallèles au plan $\Pi_{z=1}$ peuvent être vues comme des points qu'on ajoute au plan affine à l'infini pour obtenir le plan projectif. Si maintenant L' est une droite contenue dans le plan $\Pi_{z=1}$, alors il existe un unique plan $\Pi_{L'O}$ de \mathbb{R}^3 contenant la droite L et passant par l'origine O . Une droite de $\Pi_{z=1}$ correspond donc à un plan passant par l'origine, ce qui suggère la définition suivante.

Définition 3.3. Un **point** dans le plan projectif réel \mathbb{RP}^2 est une droite de \mathbb{R}^3 passant par l'origine. Une **droite** de \mathbb{RP}^2 , dite aussi **droite projective**, est un plan de \mathbb{R}^3 passant par l'origine. Un point $P \in \mathbb{RP}^2$ appartient à la droite $L \subset \mathbb{RP}^2$ si P , en tant que droite de \mathbb{R}^3 passant par l'origine, est contenue dans L vue comme un plan de \mathbb{R}^3 passant par l'origine.

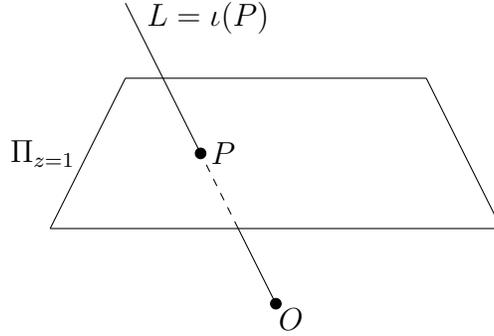


FIGURE 23 – Illustration de l’application $\iota : \Pi_{z=1} \rightarrow \mathbb{RP}^2$

Exercice 3.4. Montrer que l’intersection de deux plans distincts de \mathbb{R}^3 qui ne sont pas parallèles est une droite.

Proposition 3.5. Deux droites distinctes L_1 et L_2 de \mathbb{RP}^2 se coupent toujours en exactement un point de \mathbb{RP}^2 .

Démonstration. Soient Π_{L_1} et Π_{L_2} les plans de \mathbb{R}^3 passant par l’origine correspondant respectivement à L_1 et L_2 . Comme l’origine O appartient à Π_{L_1} et Π_{L_2} , on a que $\Pi_{L_1} \cap \Pi_{L_2} \neq \emptyset$. Les plans Π_{L_1} et Π_{L_2} ne sont donc pas parallèles. Ils sont aussi distincts, puisque les droites projectives associées L_1 et L_2 le sont. On en conclut par l’Exercice 3.4 que l’intersection $\Pi_{L_1} \cap \Pi_{L_2}$ est une droite passant par l’origine. Autrement dit, d’un point de vue projectif, $\Pi_{L_1} \cap \Pi_{L_2}$ est l’unique point de \mathbb{RP}^2 appartenant aux droites projectives L_1 et L_2 . \square

Corollaire 3.6. Dans le plan projectif réel, il n’y a pas de droites parallèles.

Si L_1 et L_2 sont deux droites distinctes, mais parallèles, du plan affine $\Pi_{z=1}$, alors ce résultat montrent que les droites projectives correspondantes $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ dans le plan projectif réel, c’est-à-dire les plans de \mathbb{R}^3 passant par l’origine et contenant respectivement les droites L_1 et L_2 , se coupent en un unique point P de \mathbb{RP}^2 . Puisque L_1 et L_2 sont parallèles sur le plan affine $\Pi_{z=1}$, le point ne peut pas être dans l’image de $\iota : \Pi_{z=1} \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Il correspond en fait à la droite L de \mathbb{R}^3 passant par l’origine et contenue dans les plans L_1O et L_2O engendrés respectivement par L_1 et O et par L_2 et O . Dans le plan L_iO , L est en fait l’unique droite parallèle à L_i passant par O . En particulier, la droite L est parallèle à $\Pi_{z=1}$, et donc est bien en dehors de l’image de l’application $\iota : \Pi_{z=1} \rightarrow \mathbb{RP}^2$. En d’autres termes, du point de vue affine, P est l’un des points ajoutés à l’infini pour obtenir le plan projectif réel.

L’ensemble des points du plan projectif n’appartenant pas à l’image $\iota(\Pi_{z=1})$ de l’application ι est en fait une droite projective, plus précisément la droite projective H correspondant au plan horizontal

$$\Pi_{z=0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$

de \mathbb{R}^3 passant par l’origine. On dit que la droite projective H est l’**horizon** du plan affine $\Pi_{z=1}$.

Définition 3.7. Les points d’un ensemble de points de \mathbb{RP}^2 sont dits **colinéaires** s’ils appartiennent à une droite projective commune. Les droites d’un ensemble de droites projectives sont dites **concourantes** s’il existe un point de \mathbb{RP}^2 appartenant à chacune de ces droites.

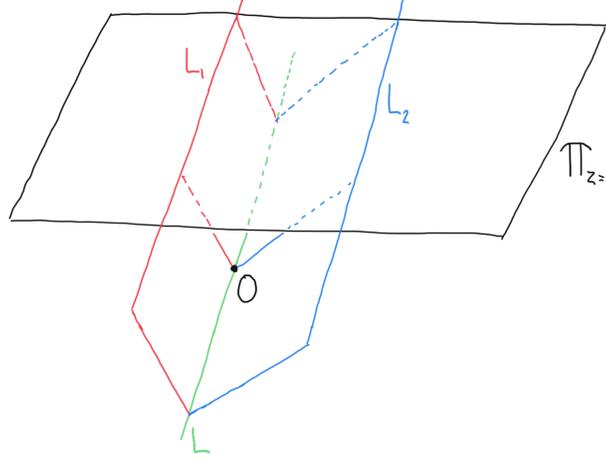


FIGURE 24 – L’intersection des droites projectives \bar{L}_1 et \bar{L}_2

Proposition 3.8. *Soient P et Q deux points distincts de \mathbb{RP}^2 . Alors il existe une unique droite de \mathbb{RP}^2 passant par ces deux points.*

Démonstration. Soient L_P et L_Q les droites de \mathbb{R}^3 passant par l’origine correspondant à P et Q respectivement. Comme P et Q sont distincts, les droites L_P et L_Q sont distinctes. D’autre part, par définition, l’origine O de \mathbb{R}^3 est un point commun à L_P et L_Q . On en déduit que L_P et L_Q engendrent un unique plan Π_{PQ} de \mathbb{R}^3 passant par l’origine et les contenant. En d’autres termes, Π_{PQ} correspond à l’unique droite projective passant par P et Q . \square

À un point $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, on peut associer l’unique droite L de \mathbb{R}^3 passant par ce point et l’origine, à savoir la droite

$$L = \{(\lambda a, \lambda b, \lambda c) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On dénote par $[a : b : c]$ le point de \mathbb{RP}^2 correspondant à la droite L . Par construction, remarquons que

$$[a : b : c] = [\lambda a : \lambda b : \lambda c] \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad (3.2)$$

puisque $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ et (a, b, c) engendrent la même droite L de \mathbb{R}^3 passant par l’origine. À cause de l’homogénéité dans le facteur λ , les variables (a, b, c) ne sont pas à proprement parler des coordonnées sur le plan projectif. Sous la forme $[a : b : c]$, on dit que ce sont des **coordonnées homogènes** pour \mathbb{RP}^2 . Si $\vec{r} = (a, b, c)$, on utilisera aussi la notation $[\vec{r}]$ pour dénoter $[a : b : c]$.

Exemple 3.9. Considérons le point $[1 : 2 : 3] \in \mathbb{RP}^2$ et tâchons de trouver P dans l’espace affine $\Pi_{z=1}$ de sorte que $\iota(P) = [1 : 2 : 3]$. Il suffit en fait de remarquer que par homogénéité,

$$[1 : 2 : 3] = \left[\frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1\right], \quad \text{en prenant } \lambda = \frac{1}{3} \text{ dans (3.2),}$$

de sorte que $P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ est bien le point tel que $\iota(P) = [a : b : c]$.

3.2 Les transformations projectives

Pour définir le plan projectif, on a regardé les points de $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ à un changement de perspective basé à l'origine près. On peut cependant regarder des changements de perspectives basés en d'autres points de \mathbb{R}^3 . Comme on le verra à la § 3.4, ceux-ci définissent en fait des bijections naturelles du plan projectif vers lui-même. Anticipons sur le résultat final en donnant dès maintenant une définition algébrique de toutes les transformations qu'on obtient en faisant agir des changements de perspectives sur le plan projectif.

Définition 3.10. Une **transformation projective** $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est une application de la forme

$$t([\vec{r}]) = [\mathbf{A}\vec{r}] \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$$

pour $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire inversible. L'ensemble des transformations projectives est dénoté par $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$.

Remarque 3.11. Puisque \mathbf{A} est linéaire, on voit que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$[\vec{r}] = [\lambda\vec{r}] \quad \implies \quad [\mathbf{A}(\lambda\vec{r})] = [\lambda\mathbf{A}\vec{r}] = [\mathbf{A}\vec{r}],$$

c'est-à-dire que l'application $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est bien définie au sens où $t([\vec{r}])$ dépend bien seulement de $[\vec{r}] \in \mathbb{RP}^2$, pas du choix de représentant $\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. De plus, le fait que \mathbf{A} est inversible assure que $\mathbf{A}\vec{r} \neq \vec{0}$ lorsque $\vec{r} \neq \vec{0}$, donc que $\mathbf{A}\vec{r}$ définit bien un élément $[\mathbf{A}\vec{r}]$ du plan projectif \mathbb{RP}^2 .

Remarque 3.12. La notation $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ vient du fait que l'ensemble des transformations projectives est obtenu par projectivisation du groupe linéaire $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ des transformations linéaires inversibles agissant sur \mathbb{R}^3 .

Exemple 3.13. Soit \mathbf{A} la transformation linéaire associée à la matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $t([\vec{r}]) = [\mathbf{A}\vec{r}]$ est une transformation projective, puisque $\det(\mathbb{A}) = 1 \neq 0$ et donc \mathbf{A} est inversible. En coordonnées homogènes, cette transformation projective est donnée par

$$t[x : y : z] = [x + y + z : y + z : z] \quad \forall [x : y : z] \in \mathbb{RP}^2.$$

Proposition 3.14. *Muni de l'opération de composition, l'ensemble $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ des transformations projectives forme un groupe.*

Démonstration. Soient $t_1([\vec{r}]) = [\mathbf{A}_1\vec{r}]$ et $t_2([\vec{r}]) = [\mathbf{A}_2\vec{r}]$ deux transformations projectives. Alors leur composée

$$t_1 \circ t_2([\vec{r}]) = t_1([\mathbf{A}_2\vec{r}]) = [\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\vec{r}]$$

est aussi une transformation projective, puisque $\mathbf{A} := \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ est une application linéaire inversible. La composition de transformations donne donc bien une opération interne sur l'ensemble $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$. L'application identité $\text{Id} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est bien une transformation projective, puisqu'elle est induite par l'application identité correspondante $\text{Id} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sur

\mathbb{R}^3 et cette dernière est une application linéaire inversible. Enfin, si t est une transformation projective de la forme $t([\vec{r}]) = [\mathbf{A}\vec{r}]$, alors son inverse est donné par

$$t^{-1}([\vec{r}]) := [\mathbf{A}^{-1}\vec{r}],$$

où \mathbf{A}^{-1} est l'inverse de l'application linéaire \mathbf{A} . En effet, on a bien que

$$t^{-1} \circ t([\vec{r}]) = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{r}] = [\vec{r}] \quad \text{et} \quad t \circ t^{-1}([\vec{r}]) = [\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\vec{r}] = [\vec{r}],$$

c'est-à-dire que $t^{-1} \circ t$ et $t \circ t^{-1}$ correspondent à l'application identité sur \mathbb{RP}^2 . Par le Lemme 1.23, les transformations projectives forment bien un groupe. \square

Remarque 3.15. Le Problème 2.10 montre que les transformations affines de $\Pi_{z=1}$ peuvent être vues comme des cas particuliers de transformations projectives. En fait, le Problème 2.10 indique que le groupe des transformations affines peut être vu comme un sous-groupe de $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$, c'est-à-dire comme un groupe correspondant à un sous-ensemble de $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ avec opération interne induite par celle de $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$.

Exercice 3.16. Donner un exemple de transformation projective qui ne provient pas d'une transformation affine de $\Pi_{z=1}$ au sens du Problème 2.10.

Comme pour les transformations affines, les transformations projectives possèdent certaines propriétés géométriques élémentaires. Cependant, comme le groupe des transformations projectives contient strictement le groupe des transformations affines, il faut s'attendre à ce que certaines propriétés affines ne soient pas préservées par les transformations projectives.

Proposition 3.17. *Une transformation projective envoie une droite projective sur une droite projective.*

Démonstration. Soit L une droite projective et Π le plan de \mathbb{R}^3 passant par l'origine correspondant. Si $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application linéaire inversible, alors $\mathbf{A}(\Pi)$ est aussi un plan passant par l'origine. Autrement dit, la transformation projective associée

$$\begin{aligned} t : \mathbb{RP}^2 &\rightarrow \mathbb{RP}^2 \\ [\vec{r}] &\mapsto [\mathbf{A}\vec{r}] \end{aligned}$$

envoie la droite projective L sur la droite projective $t(L)$ correspondant à $\mathbf{A}(\Pi)$. \square

Proposition 3.18. *La colinéarité et l'incidence sont préservées par une transformation projective.*

Démonstration. La colinéarité est préservée par une transformation projective, car une droite est envoyée sur une droite. D'autre part, si L et L' sont deux droites projectives se coupant en P et $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est une transformation projective, alors $t(P)$ appartient à $t(L)$ et $t(L')$, c'est-à-dire que les droites projectives $t(L)$ et $t(L')$ se coupent en $t(P)$. L'incidence est donc une propriété préservée par une transformation projective. \square

Avant de formuler l'analogie pour les transformations projectives du théorème fondamental de la géométrie affine, nous devons introduire la notion géométrique suivante.

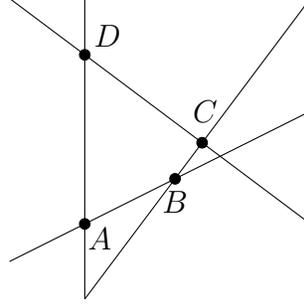


FIGURE 25 – Quadrilatère ABCD

Définition 3.19. Un **quadrilatère** dans le plan projectif est la donnée, d'une part, de quatre points $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$ pour lesquels aucun sous-ensemble de trois points n'est contenu dans une droite, et d'autre part des quatre droites projectives AB, BC, CD et DA .

Considérons le quadrilatère donné par les points $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ et $[1 : 1 : 1]$. Soit d'autre part $ABCD$ un autre quadrilatère avec $A = [a_1 : a_2 : a_3]$, $B = [b_1 : b_2 : b_3]$, $C = [c_1 : c_2 : c_3]$ et $D = [d_1 : d_2 : d_3]$. Par définition, A, B et C ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ne sont pas contenus dans un même plan. Cela signifie que \vec{a}, \vec{b} et \vec{c} sont linéairement indépendants et forment une base de \mathbb{R}^3 . Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\vec{d} := (d_1, d_2, d_3) = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Remarquons que $x \neq 0$, car autrement \vec{d} serait contenu dans le plan engendré par \vec{b}, \vec{c} , ce qui signifierait que B, C et D sont des points colinéaires dans \mathbb{RP}^2 , en contradiction avec la définition de quadrilatère. De même, $y \neq 0$ et $z \neq 0$. Ainsi, $\{x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}\}$ est aussi une base de \mathbb{R}^3 , ce qui implique que la matrice

$$\mathbb{A} := \begin{pmatrix} xa_1 & yb_1 & zc_1 \\ xa_2 & yb_2 & zc_2 \\ xa_3 & yb_3 & zc_3 \end{pmatrix}$$

est inversible. Si $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est la transformation projective associée, alors

$$\begin{aligned} t([1 : 0 : 0]) &= [x\vec{a}] = [\vec{a}] = A, \\ t([0 : 1 : 0]) &= [y\vec{b}] = [\vec{b}] = B, \\ t([0 : 0 : 1]) &= [z\vec{c}] = [\vec{c}] = C, \\ t([1 : 1 : 1]) &= [x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}] = [\vec{d}] = D. \end{aligned}$$

Plus généralement, on peut obtenir le résultat suivant.

Théorème 3.20 (Théorème fondamental de la géométrie projective). *Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux quadrilatères dans \mathbb{RP}^2 . Alors il existe une unique transformation projective $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ telle que*

$$t(A) = A', \quad t(B) = B', \quad t(C) = C' \quad \text{et} \quad t(D) = D'.$$

Démonstration. Par la discussion ci-haut, on peut trouver des transformations projectives t_1 et t_2 envoyant $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : 1]$ respectivement sur A, B, C, D et A', B', C', D' . Dans ce cas, la transformation projective $t_2 \circ t_1^{-1}$ envoie A, B, C, D sur A', B', C', D' . Si s est une autre transformation projective envoyant le quadrilatère $ABCD$ sur le quadrilatère $A'B'C'D'$, alors la transformation projective $s' := t_2^{-1} \circ s \circ t_1$ fixe les points $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ et $[1 : 1 : 1]$. Si \mathbf{A} est une application linéaire inversible telle que $s'([\vec{r}]) = [\mathbf{A}\vec{r}]$, cela signifie que la matrice associée \mathbb{A} est de la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^*$, donc que

$$s'([\vec{r}]) = [\lambda\vec{r}] = [\vec{r}] \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\},$$

c'est-à-dire que $s' : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est l'application identité. On a donc que

$$\text{Id} = s' = t_2^{-1} \circ s \circ t_1 \implies s = t_2 \circ \text{Id} \circ t_1^{-1} = t_2 \circ t_1^{-1} = t.$$

Il n'a donc bien qu'une seule transformation projective envoyant le quadrilatère $ABCD$ sur le quadrilatère $A'B'C'D'$. \square

Corollaire 3.21. *Tous les quadrilatères sont projectivement équivalents.*

3.3 Quelques résultats de géométrie projective

Un des tous premiers résultats de géométrie projective est sans doute le théorème de Pappus d'Alexandrie obtenu au IV^e siècle de notre ère. On peut en donner une preuve moderne en invoquant le théorème fondamental de la géométrie projective.

Théorème 3.22 (Pappus). *Soient A, B, C et A', B', C' des triplets de points distincts colinéaires dans \mathbb{RP}^2 . Alors $P := BC' \cap B'C$, $Q := AC' \cap A'C$ et $R := AB' \cap A'B$ sont colinéaires.*

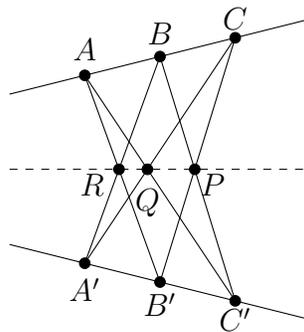


FIGURE 26 – Le théorème de Pappus

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que les points A, B, C' et B' forment un quadrilatère. En effet, autrement, le résultat est trivial, puisque l'un de ces quatre points est l'intersection des droites AB et $C'B'$, ce qui a pour conséquence que deux des trois points P, Q et R doivent en fait coïncider.

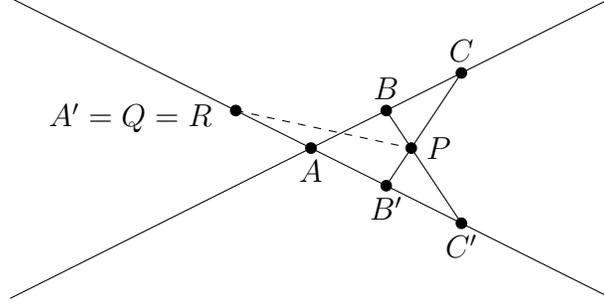


FIGURE 27 – Illustration d'un cas où $ABC'B'$ n'est pas un quadrilatère avec $A' = Q = R$

Puisque l'énoncé ne fait intervenir que des relations d'incidence et de colinéarité, on peut, par le théorème fondamental de la géométrie projective, se ramener au cas où

$$A = [1 : 0 : 0], \quad B = [0 : 1 : 0], \quad C' = [0 : 0 : 1] \quad \text{et} \quad B' = [1 : 1 : 1].$$

La droite AB correspond alors au plan $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Le point C , qui est sur cette droite, est alors donné par $C = [1 : c : 0]$ pour un certain $c \neq 0$, car $C \neq A$ et $C \neq B$. Similairement, la droite $B'C'$ correspond au plan $x = y$, donc $A' = [1 : 1 : a]$ avec $a \neq 1$, car $A' \neq C$ et $A' \neq B'$.

La droite BC' correspond au plan $x = 0$ dans \mathbb{R}^3 , alors que la droite $B'C$ correspond au plan passant par l'origine engendré par $(1, 1, 1)$ et $(1, c, 0)$, donc l'intersection des droites projectives BC' et $B'C$ est donné par une combinaison linéaire de $(1, 1, 1)$ et $(1, c, 0)$ telle que $x = 0$, c'est-à-dire que

$$P = BC' \cap B'C = [0 : 1 - c : 1].$$

De même, la droite $C'A$ correspond au plan $y = 0$, alors que CA' correspond au plan engendré par $(1, c, 0)$ et $(1, 1, a)$, donc

$$Q = AC' \cap A'C = [1 - c : 0 : -ac].$$

Finalement, AB' correspond au plan $y = z$ et $A'B$ correspond au plan passant par l'origine engendré par $(1, 1, a)$ et $(0, 1, 0)$, donc

$$R = AB' \cap A'B = [1 : a : a].$$

Dans ce cas, P, Q et R sont colinéaires, car les vecteurs qui engendrent les droites correspondantes dans \mathbb{R}^3 sont linéairement dépendants,

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - c \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - c \\ 0 \\ -ac \end{pmatrix} + (c - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Remarque 3.23. Le théorème de Pappus admet une formulation en termes affines, mais il faut alors décomposer l'énoncé en plusieurs cas distincts du point de vue affine. Par exemple, le cas où P est sur l'horizon H du plan affine correspond en termes affines à dire que les droites BC' et $B'C$ sont parallèles.

Cependant, c'est vraiment à partir du $XVII^e$ siècle que la géométrie projective commence véritablement à se développer, notamment à travers les travaux de Desargues. Celui-ci introduit notamment le concept de point à l'infini, une notion toutefois qui avait déjà été utilisée par Kepler dans ses travaux en 1604. Voici un des résultats importants de Desargues.

Théorème 3.24 (Desargues). *Soient $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ des points distincts de \mathbb{RP}^2 tels que les droites A_1A_2, B_1B_2 et C_1C_2 sont distinctes et concourantes. Alors les points $R := A_1B_1 \cap A_2B_2, Q := A_1C_1 \cap A_2C_2$ et $P := B_1C_1 \cap B_2C_2$ sont colinéaires.*

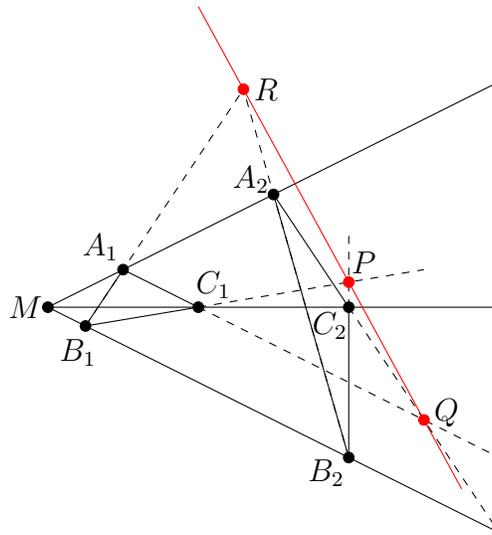


FIGURE 28 – Le théorème de Desargues

Démonstration. Soit M le point où les droites A_1A_2, B_1B_2 et C_1C_2 se coupent. Si M est en fait l'un de ces six points, disons à titre d'exemple et sans perte de généralité que $M = B_1$, alors $P = C_2, R = A_2$ et $Q \in A_2C_2$, de sorte que les trois points P, Q et R sont bien colinéaires.

On peut donc supposer que M est distinct de $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$. Dans ce cas, comme M, A_1 et A_2 sont colinéaires et distincts, les droites correspondantes dans \mathbb{R}^3 sont dans le même plan et on peut donc choisir $\vec{m}, \vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ tels que

$$M = [\vec{m}], \quad A_1 = [\vec{a}_1] \quad \text{et} \quad A_2 = [\vec{a}_2] \quad \text{avec} \quad \vec{m} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2.$$

Similairement, il existe $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{c}_1, \vec{c}_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ tels que

$$B_1 = [\vec{b}_1] \quad \text{et} \quad B_2 = [\vec{b}_2] \quad \text{avec} \quad \vec{m} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

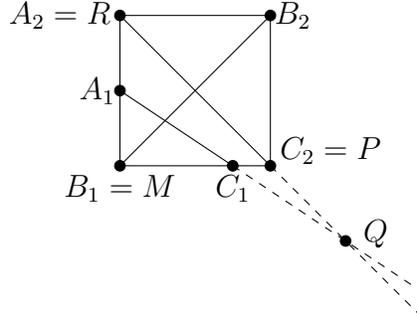


FIGURE 29 – Illustration du cas où $M = B_1$

et

$$C_1 = [\vec{c}_1] \quad \text{et} \quad C_2 = [\vec{c}_2] \quad \text{avec} \quad \vec{m} = \vec{c}_1 + \vec{c}_2.$$

En particulier, on a que $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{m} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, d'où

$$\vec{a}_1 - \vec{b}_1 = \vec{b}_2 - \vec{a}_2 =: \vec{c}_3 \quad \implies \quad [\vec{c}_3] = A_1B_1 \cap A_2B_2.$$

Similairement, $\vec{a}_3 := \vec{b}_1 - \vec{c}_1 = \vec{c}_2 - \vec{b}_2$ et $\vec{b}_3 := \vec{c}_1 - \vec{a}_1 = \vec{a}_2 - \vec{c}_2$ sont tels que

$$[\vec{a}_3] = B_1C_1 \cap B_2C_2 \quad \text{et} \quad [\vec{b}_3] = A_1C_1 \cap A_2C_2.$$

Or, comme

$$\vec{a}_3 + \vec{b}_3 + \vec{c}_3 = \vec{b}_1 - \vec{c}_1 + \vec{c}_1 - \vec{a}_1 + \vec{a}_1 - \vec{b}_1 = \vec{0},$$

cela signifie que \vec{a}_3, \vec{b}_3 et \vec{c}_3 sont linéairement dépendants, donc dans le même plan. Autrement dit, les points $A_3 = [\vec{a}_3]$, $B_3 = [\vec{b}_3]$ et $C_3 = [\vec{c}_3]$ sont colinéaires dans \mathbb{RP}^2 . \square

L'ouvrage principal de Desargues, *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec le plan*, a été l'objet de vives critiques après sa parution en 1639, si bien qu'il est tombé dans l'oubli pour près de 200 ans. Heureusement, son théorème avait aussi été publié dans le livre de Bosse *Manière universelle de Mr Desargues* en 1648, ainsi que d'autres de ses résultats, notamment son observation que le birapport est préservé par les changements de perspective.

Avant de présenter ce résultat, remarquons que contrairement à une transformation affine, un changement de perspective peut altérer le rapport de longueurs le long d'une droite tel qu'illustré.

Le rapport de longueurs le long d'une droite n'est donc pas une notion de géométrie projective. En considérant quatre points sur une droite plutôt que trois, on peut cependant définir une quantité qui se comportera bien sous l'action de transformations projectives.

Définition 3.25. Soient A, B, C et D des points colinéaires distincts de \mathbb{RP}^2 . Si $A = [\vec{a}]$, $B = [\vec{b}]$, $C = [\vec{c}]$ et $D = [\vec{d}]$, alors $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ et $\vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$ pour certains $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, puisque A, B, C et D sont colinéaires. Le **birapport** de A, B, C, D , dénoté $(ABCD)$, est donné par

$$(ABCD) := \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}. \quad (3.3)$$

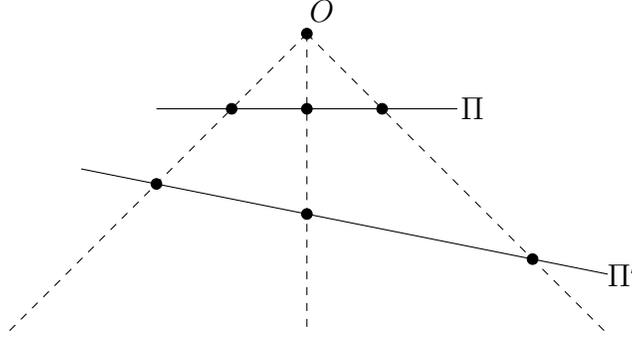


FIGURE 30 – Changement de perspective ne préservant pas les rapports de longueurs le long d'une droite

Puisque A, B, C et D sont distincts, α, β, γ et δ ne sont pas nuls et les rapports apparaissant dans l'équation (3.3) sont bien définis. On en déduit aussi que le birapport est un nombre réel non nul. Pour s'assurer que le birapport est bien défini, il faut aussi vérifier qu'il ne dépend pas du choix des représentants. Si on écrit plutôt $A = [\vec{a}_1]$, $B = [\vec{b}_1]$, $C = [\vec{c}_1]$ et $D = [\vec{d}_1]$ avec $\vec{a}_1 = e\vec{a}$, $\vec{b}_1 = f\vec{b}$, $\vec{c}_1 = g\vec{c}$ et $\vec{d}_1 = h\vec{d}$, alors

$$\begin{aligned}\vec{c}_1 &= g\vec{c} = g(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = g(\alpha e^{-1}\vec{a}_1 + \beta f^{-1}\vec{b}_1), \\ \vec{d}_1 &= h\vec{d} = h(\gamma\vec{a} + \delta\vec{b}) = h(\gamma e^{-1}\vec{a}_1 + \delta f^{-1}\vec{b}_1),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\vec{c}_1 &= \alpha_1\vec{a}_1 + \beta_1\vec{b}_1 \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \frac{g\alpha}{e}, \quad \beta_1 = \frac{g\beta}{f}, \\ \vec{d}_1 &= \gamma_1\vec{a}_1 + \delta_1\vec{b}_1 \quad \text{avec} \quad \gamma_1 = \frac{h\gamma}{e}, \quad \delta_1 = \frac{h\delta}{f}.\end{aligned}$$

Ainsi, en termes des représentants $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$ et \vec{d}_1 , on obtient bien le même birapport :

$$(ABCD) = \frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_1\delta_1} = \frac{\left(\frac{g\beta}{f}\right)\left(\frac{h\gamma}{e}\right)}{\left(\frac{g\alpha}{e}\right)\left(\frac{h\delta}{f}\right)} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}.$$

Proposition 3.26. *Le birapport est un invariant projectif, c'est-à-dire que si A, B, C, D sont colinéaires et $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est une transformation projective envoyant A, B, C et D respectivement sur A', B', C' et D' , alors*

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Démonstration. Si $A = [\vec{a}]$, $B = [\vec{b}]$, $C = [\vec{c}]$ et $D = [\vec{d}]$ avec

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \quad \text{et} \quad \vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}, \tag{3.4}$$

alors

$$(ABCD) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}.$$

Maintenant, si t est une transformation projective induite par l'application linéaire inversible $\mathbf{M} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alors $A' = [\mathbf{M}\vec{a}]$, $B' = [\mathbf{M}\vec{b}]$, $C' = [\mathbf{M}\vec{c}]$ et $D' = [\mathbf{M}\vec{d}]$. Or en appliquant \mathbf{M} à (3.4), on obtient

$$\mathbf{M}\vec{c} = \alpha\mathbf{M}\vec{a} + \beta\mathbf{M}\vec{b} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}\vec{d} = \gamma\mathbf{M}\vec{a} + \delta\mathbf{M}\vec{b},$$

de sorte qu'on a bien

$$(A'B'C'D') = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = (ABCD).$$

□

Le birapport peut être interprété comme un birapport de longueurs. En effet, si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et \vec{d} sont des vecteurs distincts contenus dans un plan Π de \mathbb{R}^3 ne passant pas par l'origine et qu'on suppose que $A = [\vec{a}]$, $B = [\vec{b}]$, $C = [\vec{c}]$ et $D = [\vec{d}]$ sont colinéaires, c'est-à-dire que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et \vec{d} sont colinéaires dans Π , alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tels que

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + (1 - \lambda)\vec{b} \quad \text{et} \quad \vec{d} = \mu\vec{a} + (1 - \mu)\vec{b},$$

de sorte que le birapport de A, B, C et D est donné par

$$(ABCD) = \frac{\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)}{\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)}.$$

Or, si A, B, C et D sont vus comme des points de Π , alors

$$\frac{1 - \lambda}{\lambda} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \mu}{\mu} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}. \quad (3.5)$$

En effet, on calcule que

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= |\vec{c} - \vec{a}| = |1 - \lambda||\vec{b} - \vec{a}|, & \overline{CB} &= |\vec{b} - \vec{c}| = |\lambda||\vec{b} - \vec{a}|, \\ \overline{AD} &= |\vec{d} - \vec{a}| = |1 - \mu||\vec{b} - \vec{a}|, & \overline{DB} &= |\vec{b} - \vec{d}| = |\mu||\vec{b} - \vec{a}|, \end{aligned}$$

ce qui donne bien (3.5) en utilisant la convention de signe de la Remarque 2.13. En utilisant la convention de signe de la Remarque 2.13, on a donc dans ce cas que

$$(ABCD) = \frac{\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right)}{\left(\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\right)}.$$

Nous utiliserons cette interprétation pour résoudre l'exercice suivant.

Exercice 3.27. Un navire sur une mer étale se dirige en ligne droite vers un port. Avant le port, il y a deux bouées le long de la trajectoire du navire, l'une à 200m et l'autre à 400m du port. Du haut d'une falaise surplombant le port, une photographie de la scène est prise. Sur cette photographie, les bouées sont à des distances de 1cm et 3cm du port, alors que le navire est à une distance de 2cm du port. À quelle distance du port se trouve effectivement le navire ?

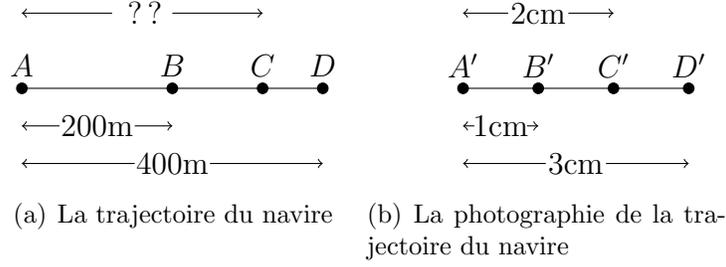


FIGURE 31 – Illustration du Problème 3.27

Soient A, B, C et D les points colinéaires correspondant au port, la bouée à 200m du port, le navire et la deuxième bouée. On veut calculer \overline{AC} . Soient A', B', C', D' les points correspondants sur la photographie. Comme A', B', C' et D' sont obtenus de A, B, C, D par un changement de perspective, le birapport est le même, donc

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Or, on calcule que

$$(A'B'C'D') = \left(\frac{\left(\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} \right)}{\left(\frac{\overline{A'D'}}{\overline{D'B'}} \right)} \right) = \frac{\left(\frac{2}{-1} \right)}{\left(\frac{3}{-2} \right)} = \frac{4}{3}.$$

Ainsi, on a donc que

$$\left(\frac{\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \right)}{\left(\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \right)} \right) = (ABCD) = (A'B'C'D') = \frac{4}{3} \implies \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot (A'B'C'D') = \frac{4}{-2} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Finalement, comme $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}$, on a donc que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\overline{AB} - \overline{AC}} = -\frac{8}{3} &\implies \overline{AC} = -\frac{8}{3} \cdot (\overline{AB} - \overline{AC}) \\ &\implies \left(1 - \frac{8}{3} \right) \overline{AC} = -\frac{8}{3} \overline{AB} = -\frac{8}{3} (200m) \\ &\implies \overline{AC} = \frac{-\frac{8}{3} (200m)}{1 - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1600}{3} m}{\frac{8-3}{3}} = \frac{1600}{5} m = 320m. \end{aligned}$$

Le navire est donc à 320 m du port.

3.4 Origines géométriques des transformations projectives

Pour expliquer la relation entre les changements de perspective et les transformations projectives, nous aurons besoin de la notion suivante.

Définition 3.28. Le **faisceau** de droites basé en $P \in \mathbb{R}^3$ est l'ensemble de toutes les droites de \mathbb{R}^3 passant par P . On le dénote par \mathcal{F}_P .

Exemple 3.29. Le plan projectif \mathbb{RP}^2 correspond au faisceau de droites \mathcal{F}_O basé à l'origine O de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3.30. Si P et Q sont des points distincts de \mathbb{R}^3 , montrer que la translation $t_{PQ} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ envoyant P sur Q induit une bijection

$$t_{PQ} : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_Q.$$

En particulier, la translation $t_P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui envoie l'origine O sur P induit une bijection $t_P : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathcal{F}_P$.

La notion de faisceau de droites nous permet en particulier de formaliser la notion de changement de point de vue mentionnée au tout début du chapitre.

Définition 3.31. Soient P et Q des points distincts de \mathbb{R}^3 et Π un plan de \mathbb{R}^3 ne contenant pas P ou Q . Le **changement de point de vue** de P à Q par rapport au plan Π est la bijection $\varphi : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_Q$ définie par

$$\varphi(L) = \begin{cases} QR, & \text{si } L \text{ coupe } \Pi \text{ en } R, \\ t_{PQ}(L), & \text{si } L \text{ est parallèle à } \Pi, \end{cases}$$

où $t_{PQ} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la translation envoyant P sur Q .

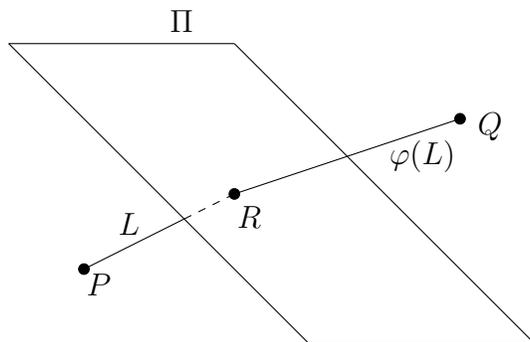


FIGURE 32 – Changement de point de vue de P à Q

Comme on a des identifications canoniques $t_P : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathcal{F}_P$ et $t_Q : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathcal{F}_Q$, un changement de point de vue φ peut aussi être interprété comme une bijection

$$t_Q^{-1} \circ \varphi \circ t_P : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2.$$

Proposition 3.32. Vu comme une bijection $\varphi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, un changement de point de vue est une transformation projective.

Démonstration. En conjuguant φ par l'inverse de la translation t_P amenant O sur P , c'est-à-dire en remplaçant φ par $t_P^{-1} \circ \varphi \circ t_P$, on peut se ramener au cas où $P = O$. Maintenant, si $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application linéaire inversible, alors comme \mathbf{A} est en particulier une transformation affine de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , donc envoie des droites sur des droites, des plans sur

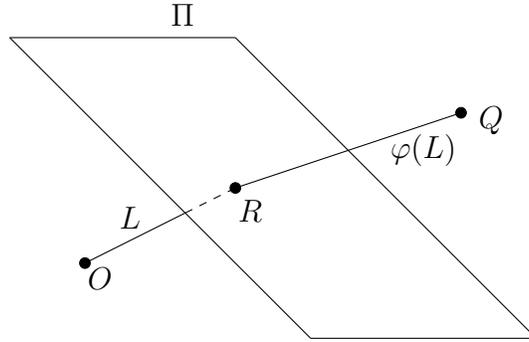


FIGURE 33 – Changement de point de vue de O à Q

des plans et préserve l'incidence et le parallélisme, on voit que si $\varphi_{\mathbf{A}} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est le changement de point de vue de O à $\mathbf{A}(Q)$ par rapport à $\mathbf{A}(\Pi)$, alors

$$\varphi_{\mathbf{A}} = t_{\mathbf{A}} \circ \varphi \circ t_{\mathbf{A}^{-1}},$$

où $t_{\mathbf{A}}$ est la transformation projective associée à \mathbf{A} . Comme les transformations projectives forment un groupe, pour montrer que φ est une transformation projective, il suffit de voir que $\varphi_{\mathbf{A}}$ est une transformation projective. Choisissons $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ comme étant l'application linéaire qui est l'identité sur le plan Π' parallèle à Π qui passe par l'origine O et qui envoie le vecteur $\vec{v} = \vec{OQ}$ sur un vecteur $\vec{w} = \mathbf{A}\vec{v}$ perpendiculaire au plan Π' . Comme $\mathbf{A}(\Pi)$ est parallèle au plan $\mathbf{A}(\Pi') = \Pi'$, on aura que \vec{w} est perpendiculaire à $\mathbf{A}(\Pi)$. Quitte à conjuguer par la transformation projective associée à \mathbf{A} on peut donc se ramener au cas où OQ est perpendiculaire à Π . Soit R le point où OQ coupe Π . En conjuguant aussi par la transformation projective associée à une rotation, on peut finalement se ramener au cas où

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = k\}$$

avec $k \neq 0$ et $Q = (0, 0, z_Q)$ tel que $z_Q \notin \{0, k\}$.

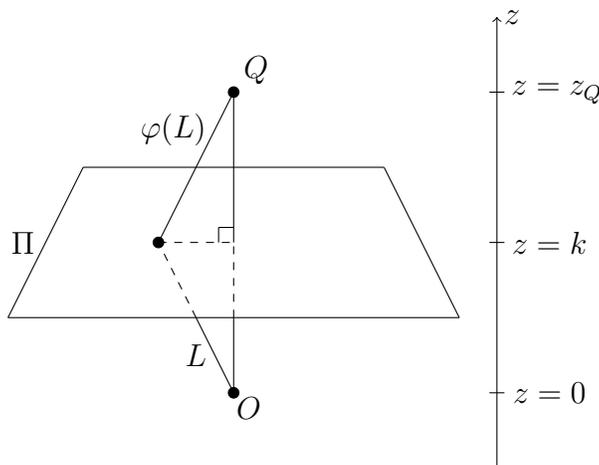


FIGURE 34 – Changement de point de vue de O à Q avec OQ perpendiculaire à Π

Un calcul simple montre alors que pour $z \neq 0$,

$$\varphi([x : y : z]) = \varphi\left(\left[\frac{kx}{z} : \frac{ky}{z} : k\right]\right) = \left[\frac{kx}{z} : \frac{ky}{z} : k - z_Q\right] = [x : y : z \left(1 - \frac{z_Q}{k}\right)]$$

D'autre part, pour $z = 0$, on a par définition de φ que

$$\varphi([x : y : 0]) = [x : y : 0].$$

Cela montre que φ est la transformation projective induite par la matrice diagonale

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \frac{z_Q}{k}) \end{pmatrix}.$$

□

Les changements de point de vue nous permettent de donner une définition de la notion de changement de perspective en termes du plan projectif \mathbb{RP}^2 .

Définition 3.33. Soient $Q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ et $\Pi, \Pi' \subset \mathbb{R}^3$ des plans distincts ne passant pas par Q ou l'origine O . On appelle **changement de perspective basé en Q de Π vers Π'** la bijection $\varphi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ donnée par $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, où $\varphi_1 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est le changement de point de vue de O à Q par rapport au plan Π et $\varphi_2 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est le changement de point de vue de Q à O par rapport à Π' .

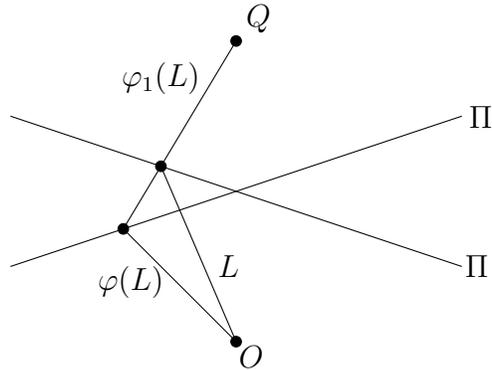


FIGURE 35 – Changement de perspective basé en Q de Π vers Π'

Proposition 3.34. *Un changement de perspective $\varphi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est une transformation projective.*

Démonstration. Comme les changements de point de vue φ_1 et φ_2 sont des transformations projectives par la Proposition 3.32, il en est de même de la composée $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ par la Proposition 3.14. □

Comme promis au début de la § 3.2, nous allons maintenant montrer que les changements de perspective engendrent toutes les transformations projectives. Pour y parvenir, donnons une description algébrique plus précise d'une transformation projective donnée par un changement de perspective. Soient donc $Q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et $\Pi, \Pi' \subset \mathbb{R}^3$ des plans distincts ne passant pas par Q ou l'origine et considérons le changement de perspective $\varphi : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ basé en Q de Π vers Π' . Par la Proposition 3.34, il existe une application linéaire inversible \mathbf{A} telle que

$$\varphi([\vec{r}]) = [\mathbf{A}(\vec{r})].$$

Si Π et Π' sont parallèles, soit Π'' le plan parallèle à Π passant par l'origine. Si au contraire Π et Π' ne sont pas parallèles, définissons plutôt Π'' comme étant le plan engendré par la droite $L = \Pi \cap \Pi'$ et l'origine. Dans les deux cas, le changement de perspective φ fixe la droite projective correspondant au plan Π'' , donc pour tout $\vec{v} \in \Pi'' \setminus \{O\}$,

$$\varphi([\vec{v}]) = [\mathbf{A}\vec{v}] = [\vec{v}].$$

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est une base de Π'' , alors $\mathbf{A}\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ et $\mathbf{A}\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$. Il faut aussi que

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \mathbf{A}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Puisque $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est une base, il faut donc que

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2,$$

c'est-à-dire que la restriction de \mathbf{A} au plan Π'' soit un multiple de l'identité :

$$\mathbf{A}|_{\Pi''} = \lambda \text{Id}_{\Pi''}.$$

En remplaçant \mathbf{A} par $\lambda^{-1}\mathbf{A}$, on peut donc supposer que $\mathbf{A}|_{\Pi''} = \text{Id}_{\Pi''}$, c'est-à-dire que \mathbf{A} fixe le plan Π'' . On a alors deux cas possibles :

Cas 1 : La droite OQ n'est pas contenue dans le plan Π'' . Alors si $\vec{v}_3 = OQ$, on a que $\varphi([\vec{v}_3]) = [\vec{v}_3]$, donc que $\mathbf{A}\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_3$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Par rapport à la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, la matrice \mathbb{A} associée à \mathbf{A} est donc la matrice diagonale

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on dit que φ est une **homologie** : φ fixe une droite projective et un point à l'extérieur de cette droite.

Exercice 3.35. En bougeant le point Q le long de la droite \vec{OQ} , on peut changer la valeur de la troisième valeur propre λ pour obtenir n'importe quelle valeur dans \mathbb{R}^* .

Cas 2 : La droite OQ est contenue dans le plan Π'' . Dans ce cas, les seuls points projectifs fixés par φ sont ceux de la droite projective associée au plan Π'' . Si $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ est un choix de vecteur tel que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 , alors

$$\mathbf{A}\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_3 + \vec{w}$$

pour certains $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Comme $[\mathbf{A}\vec{v}_3] \neq [\vec{v}_3]$, on a que $\vec{w} \neq 0$. De plus, $\mathbf{A}\vec{v}_3 \notin \Pi''$, car Π'' est fixé par \mathbf{A} et \mathbf{A}^{-1} , donc $\lambda \neq 0$. En choisissant notre base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de Π'' de sorte que $\vec{v}_2 = \vec{w}$, on a alors que la matrice \mathbb{A} associée à \mathbf{A} par rapport à la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est donnée par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On dit alors que φ est une **élation** : l'ensemble de ses points fixes forme une droite projective.

Exercice 3.36. En bougeant le point Q le long de la droite OQ , on peut obtenir toutes les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Théorème 3.37. *Les changements de perspectives engendrent toutes les transformations projectives.*

Démonstration. En utilisant des homologies, on peut engendrer toutes les transformations projectives associées à des matrices diagonales inversibles. En utilisant des élations, on peut engendrer toutes les transformations projectives associées aux matrices de la forme $\mathbb{I} + \mathbb{E}_{ij}$, où \mathbb{E}_{ij} est la matrice ayant des entrées nulles sauf en ij où il y a un 1. Par l'algorithme de Gauss-Jordan du cours d'algèbre linéaire I (MAT1250), on peut ainsi engendrer toutes les transformations projectives. \square

Remarque 3.38. Comme les changements de point de vue engendrent tous les changements de perspectives, ils engendrent eux aussi toutes les transformations projectives.

3.5 Problèmes

Problème 3.1. On définit la droite projective réelle, dénotée par $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$, comme étant l'ensemble des droites de \mathbb{R}^2 passant par l'origine. Montrer qu'en tant qu'ensemble, le plan projectif $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ peut être vu comme l'union disjointe du plan affine \mathbb{R}^2 avec la droite projective $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$. À quoi correspond $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ dans cette décomposition de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$?

Problème 3.2. Montrer qu'une droite L de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, en tant qu'ensemble de points de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, est de la forme

$$L = \{[x : y : z] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \mid ax + by + cz = 0\}$$

pour un certain $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. On dit que L a pour équation $ax + by + cz = 0$.

Problème 3.3. Montrer que la droite L passant par les points $P = [p_0 : p_1 : p_2]$ et $Q = [q_0 : q_1 : q_2]$ dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ a pour équation

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Déterminer quelle est l'équation de la droite passant par les points $[1 : 0 : 0]$ et $[1 : 1 : 1]$.

Problème 3.4. Dénotons par $(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)^*$ l'ensemble des droites de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

- a) Montrer que l'application $\mathcal{D} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow (\mathbb{RP}^2)^*$ qui à $[\vec{u}] = [a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$ associe la droite $\mathcal{D}([\vec{u}])$ d'équation $ax + by + cz = 0$ est bien définie, c'est-à-dire que $\mathcal{D}([\vec{u}])$ ne dépend pas du choix de représentant \vec{u} , mais seulement de la classe d'équivalence $[\vec{u}]$.
- b) Montrer que $\mathcal{D} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow (\mathbb{RP}^2)^*$ est une bijection.
- c) Montrer qu'en termes géométriques, cette bijection correspond à associer à une droite L de \mathbb{R}^3 passant par l'origine le plan L^\perp de \mathbb{R}^3 perpendiculaire à cette droite et passant par l'origine.

Problème 3.5. Une **corrélation** (ou **dualité**) sur le plan projectif est une transformation φ des points en droites et des droites en points qui préserve l'incidence, c'est-à-dire que si le point P appartient à la droite L , alors le point $\varphi(L)$ appartient à la droite $\varphi(P)$. Une **polarité** est une corrélacion φ qui est involutive, c'est-à-dire telle que $\varphi^{-1} = \varphi$.

- a) Soit φ la transformation qui à $P \in \mathbb{RP}^2$ associe la droite $\mathcal{D}(P)$ et qui à une droite projective L associe le point $\mathcal{D}^{-1}(L)$, où \mathcal{D} est l'application définie au numéro précédent. Si A, B sont des points distincts de \mathbb{RP}^2 , montrer que $\varphi(AB)$ est le point où les droites $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ se coupent.
- b) De même, si L_1 et L_2 sont des droites projectives distinctes, montrer que $\varphi(L_1 \cap L_2)$ est la droite passant par les points $\varphi(L_1)$ et $\varphi(L_2)$.
- c) En déduire que φ est une polarité.

Problème 3.6. On considère le cône $\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ dans \mathbb{R}^3 . Si Π est un plan de \mathbb{R}^3 ne passant pas par l'origine, alors $\Pi \cap \mathcal{C}$ est par définition une conique propre.

- a) Que devrait être la version projective de cette conique ?
- b) Cette version projective dépend-elle du choix du plan Π ?

Problème 3.7. Soient $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux applications linéaires inversibles. Montrer que A et B induisent la même transformation projective si et seulement si $A = \lambda B$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Problème 3.8. En utilisant le Problème 2.10, expliquer comment une transformation affine de \mathbb{R}^2 (identifié avec le plan $\Pi_{z=1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ dans \mathbb{R}^3) peut être vue comme une transformation projective de \mathbb{RP}^2 . Donner un exemple d'une transformation projective qui ne provient pas d'une transformation affine du plan $\Pi_{z=1}$.

Problème 3.9. Soit $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ une transformation projective quelconque. Existe-t-il un plan Π dans \mathbb{R}^3 ne passant pas par l'origine et une transformation affine $\tau : \Pi \rightarrow \Pi$ telle que t puisse être vue comme la transformation projective induite par τ comme au numéro précédent ?

Problème 3.10. Soit φ la polarité du Problème 3.5, c'est-à-dire que φ est la transformation qui à $[\vec{r}] \in \mathbb{RP}^2$ associe la droite projective correspondant au plan de \mathbb{R}^3 passant par l'origine et perpendiculaire à \vec{r} , et qui à une droite projective correspondant à un plan de \mathbb{R}^3 d'équation $ax + by + cz = 0$ associe le point $[a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$.

- a) Un quadrilatère est la donnée de quatre droites projectives L_1, L_2, L_3 et L_4 donnant lieu à quatre points d'intersection distincts $L_1 \cap L_2, L_2 \cap L_3, L_3 \cap L_4$ et $L_4 \cap L_1$. Montrer que φ établit une bijection entre les quadrilatères et les quadrilatères de \mathbb{RP}^2 .
- b) Comme une transformation projective t envoie une droite sur une droite, elle induit naturellement une transformation $t : (\mathbb{RP}^2)^* \rightarrow (\mathbb{RP}^2)^*$, où on rappelle que $(\mathbb{RP}^2)^*$ dénote l'ensemble des droites projectives de \mathbb{RP}^2 . Si \mathbb{A} est une matrice inversible et $t_{\mathbb{A}} : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ est la transformation projective associée, alors montrer que $\varphi \circ t_{\mathbb{A}}(P) = t_{(\mathbb{A}^T)^{-1}} \circ \varphi(P)$ pour tout point P .
- c) Montrer qu'en géométrie projective, tous les quadrilatères sont équivalents.

Problème 3.11. (Théorème de Brianchon) Soit $AB'CA'BC'$ un hexagone tel que les droites AB', CA' et BC' soient concourantes en P alors que les droites $B'C, A'B$ et $C'A$ soient concourantes en Q . Montrer alors que les droites AA', BB' et CC' joignant les sommets opposés de l'hexagone sont concourantes. Indice : Utiliser l'application φ du Problème 3.5 pour obtenir la version duale du théorème de Pappus.

Problème 3.12. Utiliser la polarité φ du Problème 3.5 pour donner la version duale du théorème de Desargues.

Problème 3.13. On considère les points $A = [5 : 1 : 4], B = [4 : 3 : 8]$ et $C = [4 : 5 : 0]$ de \mathbb{RP}^2 .

- a) Montrer que ces points ne sont pas colinéaires.
- b) Déterminer si les droites projectives

$$\begin{aligned} L_A &:= \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid 5x + y + 4z = 0\}, \\ L_B &:= \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid 4x + 3y + 8z = 0\}, \\ L_C &:= \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid 4x + 5y = 0\} \end{aligned}$$

sont concourantes.

Problème 3.14. Soit $t(\vec{r}) = \mathbf{A}(\vec{r}) + \vec{b}$ une transformation affine, où $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire inversible et $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Soit $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2$ l'horizon du plan affine $\Pi_{z=1}$ et considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Pi_{z=1} \\ (x, y) &\mapsto (x, y, 1) \end{aligned}$$

du Problème 2.10, ainsi que l'inclusion $\iota : \Pi_{z=1} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ de l'équation (3.1) des notes de cours. En s'inspirant du Problème 2.10, montrer qu'il existe une transformation projective $T : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ préservant la décomposition $\mathbb{RP}^2 = \iota(\Pi_{z=1}) \sqcup \mathbb{RP}^1$ et telle que

$$t(\vec{r}) = \psi^{-1} \circ \iota^{-1} \circ T \circ \iota \circ \psi(\vec{r}).$$

On dit que T est le prolongement projectif de la transformation affine t .

Problème 3.15. Soient U, Q, A, M des étoiles alignées dans cet ordre dans l'espace de sorte que U soit à 10 années-lumière de Q et à 30 années-lumière de A . Sur une photographie prise d'un télescope, les quatre étoiles correspondent respectivement à quatre points U', Q', A' et M' disposés dans cet ordre à intervalles réguliers de 1cm le long d'une droite. Quelle est la distance entre les étoiles U et M ?

Problème 3.16. Soit $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \Pi_{z=1} \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0\}$ une conique propre dans le plan $\Pi_{z=1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$.

a) Montrer que

$$\iota(\mathcal{C}) = \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0, z \neq 0\}.$$

En laissant tomber la contrainte que $z \neq 0$, ce qui correspond à possiblement ajouter des points à l'infini, on obtient la **projectivisation** $\bar{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} dans \mathbb{RP}^2 :

$$\bar{\mathcal{C}} := \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0\}.$$

b) Montrer que l'intersection de $\bar{\mathcal{C}}$ avec l'Horizon \mathbb{RP}^1 de $\Pi_{z=1}$ est donnée par

$$\bar{\mathcal{C}} \cap \mathbb{RP}^1 = \{[x : y : 0] \in \mathbb{RP}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0\}.$$

- c) En utilisant la classification affine des coniques, montrer que $\bar{\mathcal{C}} \cap \mathbb{RP}^1$ est l'ensemble vide si \mathcal{C} est une ellipse, contient un seul point si \mathcal{C} est une parabole et contient exactement deux points si \mathcal{C} est une hyperbole.
- d) Montrer que $\bar{\mathcal{C}} = \{[\vec{u}] \in \mathbb{RP}^2 \mid \langle \vec{u}, M\vec{u} \rangle = 0\}$ où $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire correspondant à la matrice symétrique

$$M = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}F \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}G \\ \frac{1}{2}F & \frac{1}{2}G & H \end{pmatrix}.$$

- e) Comme M est symétrique, on sait que M est diagonalisable et que \mathbb{R}^3 possède une base orthonormale $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de vecteur propres de M avec $M\vec{u}_i = \lambda_i\vec{u}_i$. Soit $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application orthogonale qui envoie la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sur la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Montrer que la transformation projective t_A associée à A envoie $\bar{\mathcal{C}}$ sur

$$\bar{\mathcal{C}}_\lambda = \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \lambda_3z^2 = 0\}.$$

- f) Montrer que les constantes λ_1, λ_2 et λ_3 sont toutes différentes de zéro et qu'elles n'ont pas toutes le même signe. En déduire que l'ensemble \mathcal{D} des solutions de l'équation $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \lambda_3z^2 = 0$ dans \mathbb{R}^3 est un cône (à base elliptique). *Indice : Procéder par contradiction en supposant que l'une des valeurs propres est nulle et puis en supposant que les trois valeurs propres ont le même signe.*
- g) Vérifier que l'inverse A^{-1} de l'application linéaire A envoie le cône \mathcal{D} isométriquement sur un cône $A^{-1}(\mathcal{D})$ tel que $\mathcal{C} = \Pi_{z=1} \cap A^{-1}(\mathcal{D})$, de sorte que la conique \mathcal{C} est bien donnée par l'intersection d'un plan et d'un cône (à base elliptique) dans \mathbb{R}^3 .
- h) Montrer que $\bar{\mathcal{C}}$ est projectivement équivalente à la conique projective canonique

$$\bar{\mathcal{C}}_{\text{can}} = \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

- i) Cela montre qu'en géométrie projective, toutes les coniques propres sont équivalentes. En pensant en termes de sections de cônes, expliquer comment un changement de perspective permet de passer d'une ellipse à une parabole ou une hyperbole.

Problème 3.17. Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps fini à p éléments où l'addition et la multiplication se font modulo p . Par exemple, pour $p = 7$, on a que $3 + 4 = 0 \pmod{7}$, donc 4 est l'inverse additif de 3 dans \mathbb{F}_7 , alors que $3 \cdot 5 = 1 \pmod{7}$, donc 5 est l'inverse multiplicatif de 3 dans \mathbb{F}_7 . Par analogie avec le corps des nombres réels, une droite L de l'espace vectoriel \mathbb{F}_p^3 (de corps \mathbb{F}_p) passant par l'origine est un sous-ensemble de la forme

$$L = \{(a_0t, a_1t, a_2t) \in \mathbb{F}_p^3 \mid t \in \mathbb{F}_p\}$$

pour un certain $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{F}_p^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. On définit le plan projectif $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$ comme étant l'ensemble des droites de l'espace vectoriel \mathbb{F}_p^3 passant par l'origine. Comme pour $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, on peut utiliser la notation $L = [a_0 : a_1 : a_2]$ avec la convention cette fois que $[a_0 : a_1 : a_2] = [a_0t : a_1t : a_2t]$ pour $t \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$.

De même, un plan Π de \mathbb{F}_p^3 passant par l'origine est un sous-ensemble de la forme :

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_p^3 \mid ax + by + cz = 0\}$$

pour un certain $(a, b, c) \in \mathbb{F}_p^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

- Combien de points le plan projectif $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$ possède-t-il ?
- Par analogie avec $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, donner une définition de droite projective dans le plan projectif $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$. Combien y a-t-il de droites projectives différentes dans $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$?
- Soit $Q = [q_0 : q_1 : q_2]$ un point de $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$. Combien de droites projectives de $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$ passent par ce point ?
- Soient $P = [p_0 : p_1 : p_2]$ et $Q = [q_0 : q_1 : q_2]$ deux points distincts de $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$. Montrer qu'il existe une seule droite projective de $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$ passant par ces deux points. Indice : Considérer le noyau de l'application linéaire $A : \mathbb{F}_p^3 \rightarrow \mathbb{F}_p^2$ associée à la matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix}$.
- Soient L_1 et L_2 deux droites projectives distinctes dans $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$. Montrer que ces droites se coupent en exactement un point.
- Un jeu consiste en 13 cartes sur lesquelles sont dessinés des symboles. Lorsqu'on prend deux cartes quelconques, il y a toujours exactement un symbole commun aux deux cartes. De plus, chaque symbole apparaît sur exactement 4 cartes. Déterminer de façon géométrique un nombre de symboles distincts pour lequel il est possible de réaliser un tel jeu. Quel serait le nombre de symboles par carte ?

4 Géométrie sphérique



Soit

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad (4.1)$$

la sphère de rayon 1 centrée à l'origine dans \mathbb{R}^3 .

Définition 4.1. Sur \mathbb{S}^2 , un **grand cercle** est un cercle obtenu en prenant l'intersection de \mathbb{S}^2 avec un plan Π passant par l'origine. Si C_1 et C_2 sont deux grands cercles se coupant en P , l'angle θ de C_1 vers C_2 est l'angle de Π_1 vers Π_2 pour les plans correspondants.

En déclarant que les grands cercles jouent le rôle de droites sur la sphère, on obtient une géométrie sur \mathbb{S}^2 où on a la notion de point, de droite, d'incidence, d'angle et de triangle. Dans ce nouveau cadre, les quatre premiers postulats d'Euclide, adéquatement ajustés, restent vrais :

1. Pour toute paire de points de \mathbb{S}^2 , il existe un grand cercle (droite) passant par ces deux points ;

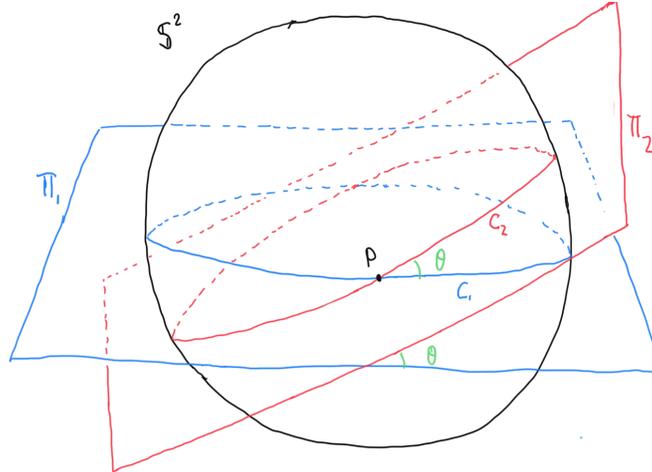


FIGURE 36 – Angle θ entre deux grands cercles se coupant en P

2. Tout arc de grand cercle (segment de droite) peut être prolongé en un grand cercle (droite);
3. Pour tout point et tout arc de grand cercle, il existe un cercle ayant pour centre ce point et rayon cet arc de grand cercle;

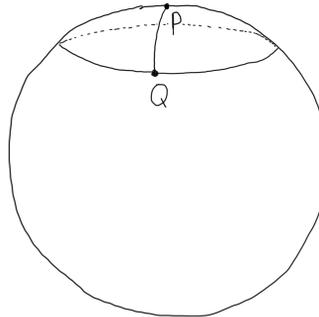


FIGURE 37 – Cercle centré en P spécifié par l'arc de grand cercle PQ

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

Le cinquième postulat n'est toutefois plus vérifié et doit être remplacé par le postulat suivant :

5. Soit C un grand cercle et $P \in \mathbb{S}^2$ qui n'est pas contenu dans C . Alors tout grand cercle passant par P coupe nécessairement le grand cercle C .

En particulier, on déduit de ce postulat qu'il n'existe pas de paire de grands cercles parallèles.

Exercice 4.2. Montrer que deux grands cercles distincts se coupent toujours en exactement deux points distincts. Montrer aussi que ces points sont en fait **antipodaux** au sens où si l'un des points correspond au vecteur $\vec{r} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, alors l'autre correspondra au vecteur $-\vec{r}$.

4.1 La notion de distance sur la sphère \mathbb{S}^2

De la même façon qu'en géométrie euclidienne, on utilise des droites pour définir la distance entre deux points, on peut sur \mathbb{S}^2 utiliser les arcs de grands cercles pour définir la distance entre deux points.

Définition 4.3. Soient $P, Q \in \mathbb{S}^2$ des points distincts. Si P et Q sont antipodaux, il existe une infinité de grands cercles passant par P et Q . On déclare que **la distance** $d_{\mathbb{S}^2}(P, Q)$ entre P et Q sur \mathbb{S}^2 est π , c'est-à-dire la longueur d'un arc de grand cercle entre P et Q . Si P et Q ne sont pas antipodaux, il existe un unique grand cercle C passant par P et Q , et donc deux arcs de grand cercle correspondants entre P et Q , $C = S_1 \cup S_2$. On définit alors **la distance** $d_{\mathbb{S}^2}(P, Q)$ entre P et Q sur \mathbb{S}^2 comme étant la plus petite longueur entre les longueurs d'arc de S_1 et S_2 .

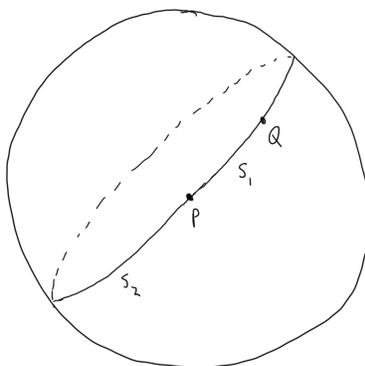


FIGURE 38 – Distance entre P et Q

Remarque 4.4. En particulier, pour tous $P, Q \in \mathbb{S}^2$, la distance $d_{\mathbb{S}^2}(P, Q)$ entre P et Q est comprise entre 0 et π . De plus, la distance entre P et Q est égale à π si et seulement si P et Q sont antipodaux.

Le résultat suivant, qu'on énoncera sans en donner la preuve, est un théorème de géométrie différentielle.

Théorème 4.5. Soient P et Q des points distincts de \mathbb{S}^2 . Alors il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ différentiable par morceau allant de P à Q dont la longueur, donnée par

$$\ell(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt,$$

est minimale. De plus, γ est unique à une paramétrisation près si Q est suffisamment près de P .

Corollaire 4.6. Pour Q suffisamment près de P , l'arc de grand cercle le plus court entre P et Q est l'unique chemin de longueur minimale (à une paramétrisation près).

Démonstration. Soit C le grand cercle passant par P et Q et Π le plan correspondant dans \mathbb{R}^3 . Soit γ un chemin de P à Q de longueur minimale. Soit $t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ la transformation induite par la réflexion dans \mathbb{R}^3 par rapport au plan Π . Alors $t(\gamma)$ est aussi un chemin de P à Q de longueur minimale. Par unicité du chemin de longueur minimale à une paramétrisation près, on a donc, en supposant sans perte de généralité que γ est paramétré par $\frac{s}{\ell(\gamma)}$ avec s la distance parcourue, que $t \circ \gamma = \gamma$. L'image de γ est donc contenue dans l'ensemble des points fixés par la réflexion t , c'est-à-dire que $\gamma([0, 1]) \subset L$, d'où le résultat. \square

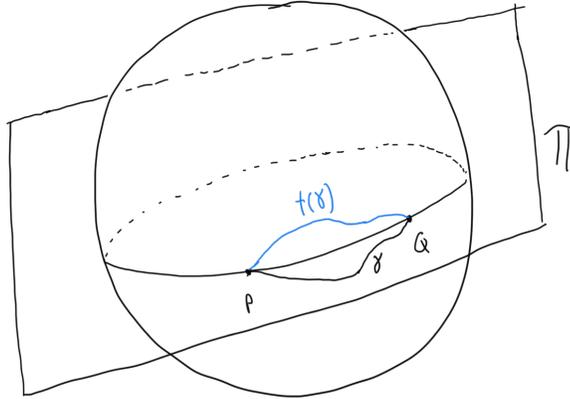


FIGURE 39 – Réflexion du chemin γ par rapport au plan Π

Définition 4.7. Une **géodésique** est un chemin qui est localement de longueur minimale.

Le corollaire précédent peut être reformulé en disant qu'un chemin paramétré par la distance parcouru $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$ est une géodésique si et seulement si $\gamma([a, b])$ est contenue dans un grand cercle.

Corollaire 4.8. Soient $P, Q \in \mathbb{S}^2$ deux points distincts. Alors un chemin de longueur minimale entre P et Q est forcément une géodésique.

Démonstration. Autrement, on pourrait réduire la longueur de γ en le modifiant. \square

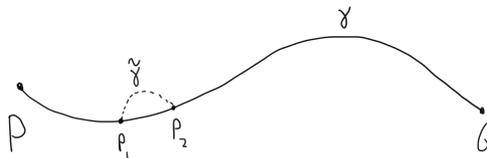


FIGURE 40 – Modification de γ le long d'un chemin plus court $\tilde{\gamma}$ entre P_1 et P_2

Corollaire 4.9 (Inégalité du triangle). *Si $P, Q, R \in \mathbb{S}^2$ sont des points distincts, alors*

$$d_{\mathbb{S}^2}(P, Q) \leq d_{\mathbb{S}^2}(P, R) + d_{\mathbb{S}^2}(R, Q).$$

Démonstration. Soient L_{PQ} , L_{PR} et L_{RQ} des arcs de grands cercles de longueurs minimales allant respectivement de P à Q , de P à R et de R à Q . Comme $L_{PR} \cup L_{RQ}$ définit un chemin allant de P à Q , on a que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{S}^2}(P, R) + d_{\mathbb{S}^2}(R, Q) &= \ell(L_{PR}) + \ell(L_{RQ}) = \ell(L_{PR} \cup L_{RQ}) \\ &\geq \ell(L_{PQ}), \text{ car } L_{PQ} \text{ est un chemin de longueur minimale entre } P \text{ et } Q, \\ &= d_{\mathbb{S}^2}(P, Q). \end{aligned}$$

□

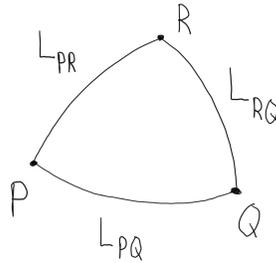


FIGURE 41 – Inégalité du triangle

Définition 4.10. Une **isométrie** de \mathbb{S}^2 est une bijection $t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ qui préserve les distances :

$$\forall P, Q \in \mathbb{S}^2, \quad d_{\mathbb{S}^2}(t(P), t(Q)) = d_{\mathbb{S}^2}(P, Q).$$

Exercice 4.11. Montrer que les isométries de \mathbb{S}^2 , munies de l'opération de composition, forment un groupe.

Exemple 4.12. Soit $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application orthogonale, c'est-à-dire une application linéaire préservant le produit scalaire. Comme \mathbf{A} préserve le produit scalaire et que

$$\mathbb{S}^2 = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = 1\},$$

on voit que \mathbf{A} induit une bijection $t_{\mathbf{A}} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. De plus, pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{S}^2$, l'angle θ entre \vec{u} et \vec{v} est préservé par \mathbf{A} et $t_{\mathbf{A}}$, puisque $\cos \theta = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Comme la distance entre \vec{u} et \vec{v} sur \mathbb{S}^2 est donnée par

$$d_{\mathbb{S}^2}(\vec{u}, \vec{v}) = \min\{\theta, 2\pi - \theta\},$$

cela montre que $t_{\mathbf{A}} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ est en fait une isométrie de \mathbb{S}^2 .

En fait, toutes les isométries de \mathbb{S}^2 proviennent d'une application orthogonale de \mathbb{R}^3 .

Théorème 4.13. *Le groupe des isométries de \mathbb{S}^2 correspond au groupe $O(3)$ des applications orthogonales de \mathbb{R}^3 .*

Démonstration. On a vu dans l'Exemple 4.12 que les éléments de $O(3)$ engendrent par restriction des isométries de \mathbb{S}^2 . Inversement, si $t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ est une isométrie, alors soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application donnée par

$$T(\vec{r}) = \begin{cases} \|\vec{r}\| t\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\right), & \vec{r} \neq \vec{0}, \\ \vec{0}, & \vec{r} = \vec{0}. \end{cases}$$

Alors $T|_{\mathbb{S}^2} = t$. De plus, comme

$$\cos(d_{\mathbb{S}^2}(\vec{u}, \vec{v})) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{S}^2,$$

on voit que T préserve le produit scalaire, puisque

$$\begin{aligned} \langle T\vec{u}, T\vec{v} \rangle &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \left\langle t\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right), t\left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) \right\rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \left\langle \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right), \left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) \right\rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}, \end{aligned}$$

alors que si \vec{u} ou \vec{v} est égal à $\vec{0}$, on a encore que

$$\langle T\vec{u}, T\vec{v} \rangle = 0 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

On en déduit que T est bien une application préservant le produit scalaire. Par la preuve de la Proposition 1.11, T est donc automatiquement une application linéaire, ce qui termine la démonstration. \square

Corollaire 4.14. *Une isométrie de \mathbb{S}^2 envoie un grand cercle sur un grand cercle.*

4.2 Trigonométrie sur la sphère \mathbb{S}^2

Puisqu'on a une notion de segment de droite sur \mathbb{S}^2 , à savoir des arcs de grands cercles, on peut introduire la notion de triangle.

Définition 4.15. Un **triangle sphérique** sur \mathbb{S}^2 est la donnée de trois points A , B et C sur \mathbb{S}^2 pas tous contenus dans un même grand cercle, et d'arcs de grands cercles a , b et c joignant B à C , A à C et A à B respectivement et ne se coupant possiblement qu'en A , B ou C . On dit que A , B et C sont les **sommets** du triangles et que a , b et c sont les **côtés** du triangle.

Remarque 4.16. Le cas où deux des sommets sont antipodaux est exclu, puisqu'alors les trois sommets sont forcément contenus dans un grand cercle commun.

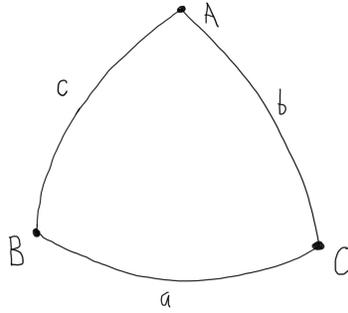


FIGURE 42 – Triangle sphérique

Les arcs de grands cercles a , b , et c doivent être spécifiés, puisque pour deux sommets A et B , il y a toujours deux choix possibles d'arcs de grands cercles allant de A à B . Les côtés a , b et c du triangle partitionnent la sphère \mathbb{S}^2 en deux régions A_1 et A_2 . A priori, chacune de ces régions peut être vue comme l'intérieur du triangle. Comme le montre l'exercice qui suit, donnés trois sommets A , B et C qui ne sont pas contenus dans un même grand cercle, il existe un choix naturel des trois côtés d'un triangle sphérique ayant pour sommets A , B et C , ainsi qu'un choix naturel de son intérieur.

Exercice 4.17. Soient A, B, C trois points de \mathbb{S}^2 qui ne sont pas tous sur le même grand cercle.

- Montrer qu'il y a quatre triangles sphériques ayant pour sommets A, B et C .
- Parmi ces quatre choix possibles de triangles ayant pour sommets A, B et C , montrer qu'un seul minimise le périmètre.
- Montrer que ce triangle de périmètre minimal décompose la sphère en deux régions, l'une d'elle contenant les prolongements des côtés du triangles en grands cercles et l'autre non. Par analogie avec le cas euclidien, expliquer pourquoi la seconde région devraient être considérée comme l'intérieur du triangle.

La Proposition 1.2 admet l'analogie sphérique suivant.

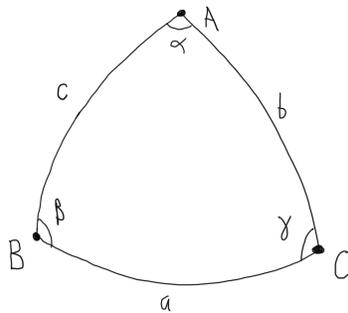


FIGURE 43 – Angles internes d'un triangle sphérique

Théorème 4.18. Soit T un triangle sphérique de sommets A, B, C et de côtés a, b, c . Soient α, β et γ les angles internes mesurés en radians du triangle T aux sommets A, B et C . Alors

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{aire}(T),$$

où $\text{aire}(T)$ est l'aire du triangle T .

Démonstration. On supposera que T est de périmètre minimal au sens de l'Exercice 4.17 et que l'intérieur de T est spécifié par la partie c) de cet exercice, les autres cas possibles étant couverts dans les exercices qui suivent cette démonstration. Prolongeons a, b , et c en des grands cercles \tilde{a}, \tilde{b} et \tilde{c} comme sur la Figure 44. Les grands cercles \tilde{a}, \tilde{b} et \tilde{c} découpent alors

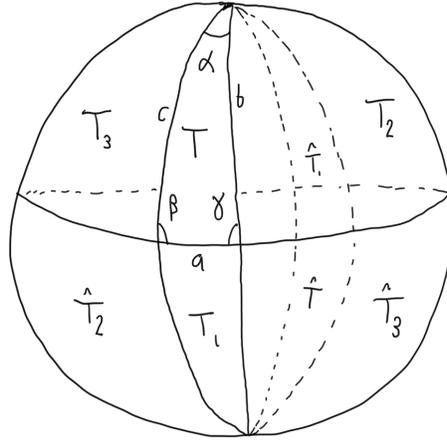


FIGURE 44 – Triangle T sur la sphère \mathbb{S}^2

\mathbb{S}^2 en huit triangles. Soient T_1, T_2 et T_3 les triangles adjacents à T en a, b et c respectivement. On obtient les quatre autres triangles de notre découpage en prenant les triangles antipodaux $\hat{T}, \hat{T}_1, \hat{T}_2$ et \hat{T}_3 à T, T_1, T_2 et T_3 respectivement. Maintenant, comme l'aire d'un quartier de sphère d'angle α est de $\frac{\alpha}{2\pi} \times 4\pi = 2\alpha$, on voit que

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \text{aire}(T) + \text{aire}(T_1), \\ 2\beta &= \text{aire}(T) + \text{aire}(T_2), \\ 2\gamma &= \text{aire}(T) + \text{aire}(T_3). \end{aligned} \tag{4.2}$$

D'autre part, l'aire de la région délimitée par \tilde{a} et contenant T est la moitié de l'aire de la sphère \mathbb{S}^2 , donc est égale à 2π . C'est aussi les sommes des aires des triangles qui la décomposent, donc

$$\begin{aligned} 2\pi &= \text{aire}(T) + \text{aire}(T_2) + \text{aire}(T_3) + \text{aire}(\hat{T}_1), \\ &= \text{aire}(T) + \text{aire}(T_2) + \text{aire}(T_3) + \text{aire}(T_1), \end{aligned} \tag{4.3}$$

où la deuxième égalité découle du fait que l'application antipodale $\vec{r} \mapsto -\vec{r}$ envoie T_1 isométriquement sur \hat{T}_1 , donc $\text{aire}(T_1) = \text{aire}(\hat{T}_1)$. En sommant les trois équations de (4.2) et en utilisant (4.3), on obtient donc que

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 3 \text{aire}(T) + \text{aire}(T_1) + \text{aire}(T_2) + \text{aire}(T_3), && \text{par (4.2),} \\ &= 2 \text{aire}(T) + 2\pi, && \text{par (4.3).} \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat voulu en divisant par 2. □

Exercice 4.19. Montrer que le Théorème 4.18 reste valide pour l'autre choix d'intérieur du triangle T de périmètre minimal ayant pour sommets A, B et C .

Exercice 4.20. Montrer que le Théorème 4.18 est aussi valide pour les trois autres choix de triangles ayant pour sommets A, B et C et ce, peu importe la région qu'on déclare être l'intérieur du triangle.

Corollaire 4.21. *Un triangle sphérique ne peut pas être envoyé isométriquement sur un triangle euclidien.*

Corollaire 4.22. *Il n'existe pas de carte plane d'une région de la sphère qui représente fidèlement les distances entre les points.*

Remarque 4.23. Dans le cadre du cours de géométrie différentielle (MAT3560), le Théorème 4.18 admet une généralisation, le théorème de Gauss-Bonnet, à toutes les surfaces courbes. Il faut dans ce cadre plus général remplacer les grands cercles par des géodésiques et l'aire du triangle par l'intégrale de la courbure de Gauss.

4.3 La projection stéréographique

Même si une carte plane d'une région de la sphère ne peut jamais représenter fidèlement les distances, certaines quantités géométriques peuvent être représentées fidèlement. Il existe par exemple des cartes qui préservent les aires comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 4.24. Soit $p_a : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow \mathcal{C}$ la projection sur le cylindre

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$$

donnée par $p_a(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) = (\cos \phi, \sin \phi, \sin \theta)$, où $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$. La projection p_a est appelée la **projection cylindrique de Lambert**.

- a) Montrer que p_a envoie une région T de \mathbb{S}^2 sur une région $p_a(T)$ de même aire.
- b) En déduire que l'aire de la sphère est de 4π .

Pour les cartes maritimes, on souhaiterait plutôt que les angles soient représentés fidèlement. C'est aussi possible comme on va le voir.

Définition 4.25. Soit $\Pi_{z=0}$ le plan d'équation $z = 0$ dans \mathbb{R}^3 et soit $N = (0, 0, 1)$ le point correspondant au pôle Nord de \mathbb{S}^2 . La **projection stéréographique** $p_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \Pi_{z=0}$ est l'application qui à $Q \in \mathbb{S}^2$ associe le point $Q' \in \Pi_{z=0}$ où la droite QN coupe le plan $\Pi_{z=0}$.

Pour montrer que la projection stéréographique préserve les angles, nous auront besoin de deux lemmes préparatoires.

Lemme 4.26. *L'angle α' entre la droite QN et le plan $\Pi_{z=0}$ est le même que l'angle α entre la droite QN et le plan Π_Q tangent à la sphère \mathbb{S}^2 en Q .*

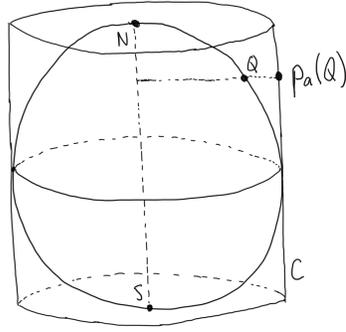


FIGURE 45 – La projection cylindrique de Lambert

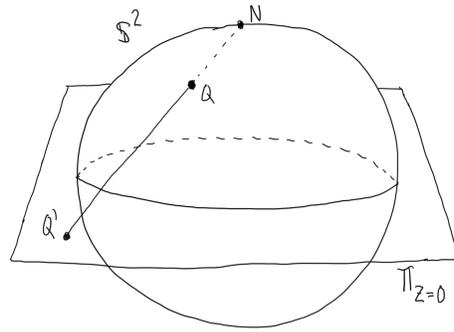


FIGURE 46 – La projection stéréographique

Démonstration. En coupant avec le plan passant par l'origine, Q et N , on peut se ramener à un problème dans le plan euclidien où $\Pi_{z=0}$ et Π_Q sont alors des droites. Si θ est l'angle entre la verticale et la droite QN , alors $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \theta$, car le plan $\Pi_{z=0}$ est horizontal, c'est-à-dire perpendiculaire à la verticale. Comme $\overline{OQ} = \overline{ON} = 1$, le triangle OQN est isocèle et l'angle $\angle OQN$ est égal à θ . Or, Π_Q est perpendiculaire à OQ , ce qui montre que

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta = \alpha'.$$

□

Lemme 4.27. Soient Π_1 et Π_2 deux plans se coupant sur la droite $L_{12} = \Pi_1 \cap \Pi_2 \subset \mathbb{R}^3$. Soient Π et Π' deux plans coupant la droite L_{12} avec le même angle. Alors l'angle entre les droites $L_1 = \Pi \cap \Pi_1$ et $L_2 = \Pi \cap \Pi_2$ est le même que l'angle entre les droites $L'_1 = \Pi' \cap \Pi_1$ et $L'_2 = \Pi' \cap \Pi_2$.

Démonstration. Une réflexion ou une translation de \mathbb{R}^3 le long de la droite L_{12} envoie Π isométriquement sur Π' en préservant les plans Π_1 et Π_2 . □

Théorème 4.28. La projection stéréographique $p_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \Pi_{z=0}$ préserve les angles.

Démonstration. Soient C_1 et C_2 des grands cercles distincts se coupant en $Q \in \mathbb{S}^2$ et soit α l'angle qu'ils forment en Q . Soient \vec{u} et \vec{v} des vecteurs tangents à C_1 et C_2 en Q , de sorte que

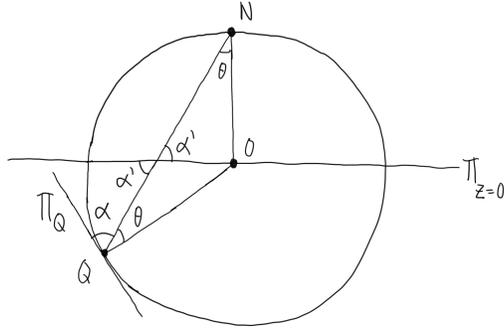


FIGURE 47 – Illustration de l'énoncé du Lemme 4.26

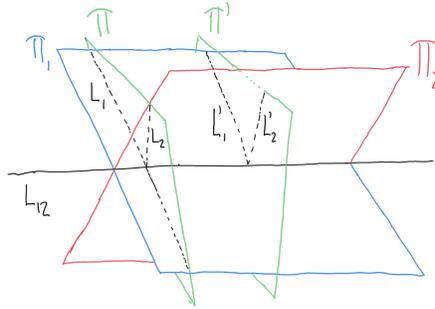


FIGURE 48 – Illustration de l'énoncé du Lemme 4.26

l'angle entre \vec{u} et \vec{v} est α . Soient Π_1 et Π_2 les plans de \mathbb{R}^3 engendrés par QN et respectivement \vec{u} et \vec{v} , de sorte que $\Pi_1 \cap \Pi_2 = QN$. Alors l'angle α entre \vec{u} et \vec{v} correspond sous la projection stéréographique à l'angle entre les droites $L_1 = \Pi_1 \cap \Pi_{z=0}$ et $L_2 = \Pi_2 \cap \Pi_{z=0}$ dans $\Pi_{z=0}$, ces droites étant respectivement tangentes aux courbes $p_N(C_1)$ et $p_N(C_2)$ de $\Pi_{z=0}$ se coupant en $p_N(Q)$. Par les deux lemmes précédents, cet angle est aussi α . \square

Cette propriété de la projection stéréographique était connue des Grecs de l'antiquité. Elle intervient notamment dans la conception de l'astrolabe, qui aurait été inventé par l'astronome Hipparque au deuxième siècle avant notre ère. Comme le montre l'exercice qui suit, en prenant un plan parallèle à $\Pi_{z=0}$ qui ne passe pas par le point N , on obtient aussi une projection qui préserve les angles.

Exercice 4.29. Pour $k \neq 1$, soient $\Pi_{z=k}$ le plan d'équation $z = k$ dans \mathbb{R}^3 et

$$p_{N,k} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \Pi_{z=k}$$

l'application qui à $Q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ associe le point $Q' \in \Pi_{z=k}$ où la droite QN coupe le plan $\Pi_{z=k}$. Montrer que $p_{N,k}$ préserve les angles en montrant d'abord que $p_{N,k} \circ p_N^{-1} : \Pi_{z=0} \rightarrow \Pi_{z=k}$ est une homothétie, donc préserve les angles.

Pour prolonger la définition de la projection stéréographique à toute la sphère \mathbb{S}^2 , on peut faire appel à la définition suivante.

Définition 4.30. Le **plan étendu** est l'union de \mathbb{R}^2 avec un point supplémentaire, le point à l'infini, dénoté ∞ . Lorsqu'on identifie \mathbb{R}^2 avec le plan complexe \mathbb{C} via l'identification

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x + iy, \end{aligned}$$

on dénote par $\widehat{\mathbb{C}}$ le plan étendu, c'est-à-dire que $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

En déclarant que la projection stéréographique envoie le pôle Nord à l'infini, la projection stéréographique p_N s'étend donc à toute la sphère et induit une bijection $p_N : \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

Proposition 4.31. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, on a que $p_N(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z} \in \widehat{\mathbb{C}}$, et inversement

$$p_N^{-1}(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, en effectuant une rotation autour de l'axe des z , on peut se ramener au cas où $y = 0$. Soit donc $(x_0, 0, z_0) \in \mathbb{S}^2$ et soit $(x_1, 0) := p_N(x_0, 0, z_0)$ son image. Alors les points $(x_0, 0, z_0)$, $(0, 0, 1)$ et $(x_1, 0, 0)$ sont sur la même droite L dans le plan $y = 0$. On vérifie que l'équation de cette droite est

$$z = \frac{z_0 - 1}{x_0}x + 1.$$

Comme $(x_1, 0, 0)$ appartient à cette droite, il faut donc que

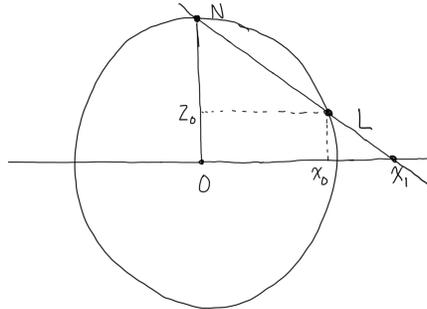


FIGURE 49 – La droite L

$$0 = \frac{z_0 - 1}{x_0}x_1 + 1 \quad \implies \quad x_1 = \frac{x_0}{1 - z_0}.$$

Inversement, comme on suppose que $y = 0$ et que $x_0^2 + z_0^2 = 1$, on a que

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x_1 &= \frac{x_0}{1-z_0} \\ x_0^2 + z_0^2 &= 1 \end{cases} &\implies \begin{cases} x_0 &= x_1(1-z_0) \\ 1 &= x_1^2(1-z_0)^2 + z_0^2 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} x_0 &= x_1(1-z_0) \\ 1 &= x_1^2(1-2z_0+z_0^2) + z_0^2 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} x_0 &= x_1(1-z_0) \\ 0 &= (1+x_1^2)z_0^2 - 2x_1^2z_0 + (x_1^2-1) \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} x_0 &= x_1(1-z_0) \\ z_0 &= \frac{2x_1^2 \pm \sqrt{4x_1^4 - 4(x_1^2-1)(x_1^2+1)}}{2(1+x_1^2)} = \frac{x_1^2 \pm \sqrt{x_1^4 - x_1^2 + 1}}{1+x_1^2} = \frac{x_1^2 \pm 1}{x_1^2 + 1} \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} x_0 &= x_1(1-z_0) \\ z_0 &= \frac{x_1^2 - 1}{x_1^2 + 1} \end{cases} \quad \text{car autrement } (x_0, 0, z_0) = N, \\
&\implies x_0 = x_1 \left(1 - \frac{x_1^2 - 1}{x_1^2 + 1} \right) = x_1 \left(\frac{x_1^2 + 1 - x_1^2 + 1}{x_1^2 + 1} \right) = \frac{2x_1}{x_1^2 + 1}.
\end{aligned}$$

□

Ce résultat va nous permettre de décrire l'image des cercles de \mathbb{S}^2 par rapport à la projection stéréographique.

Théorème 4.32. *Soit $C \subset \mathbb{S}^2$ un cercle. Si C passe par le pôle Nord N , alors $p_N(C)$ est l'union d'une droite L de \mathbb{R}^2 et du point à l'infini : $p_N(C) = L \cup \{\infty\}$. Si C ne passe pas par le pôle Nord, alors $p_N(C)$ est un cercle dans \mathbb{R}^2 .*

Démonstration. Le cercle C peut être décrit comme étant l'intersection de la sphère \mathbb{S}^2 avec un plan Π_C d'équation

$$ax + by + cz = d \tag{4.4}$$

avec $(a, b, c) \neq 0$. Si $(x, y, 0) \in p_N(C)$, il vient en substituant la formule de la Proposition 4.31 dans l'équation (4.4) que

$$2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) = d(x^2 + y^2 + 1) \implies (c-d)x^2 + (c-d)y^2 + 2ax + 2by = d+c.$$

Or, comme

$$N \in C \iff (0, 0, 1) \in \Pi_C \iff c = d,$$

on voit que si $N \in C$, alors $p_N(N) = \infty$ et $p_N(C) \cap \Pi_{z=0}$ a pour équation

$$2ax + 2by = d + c,$$

qui est bien l'équation d'une droite, puisque le cas où $a = b = 0$ correspondrait au cas où Π_C est tangent à \mathbb{S}^2 en N avec $C = \{N\}$, un point plutôt qu'un cercle. Dans le cas où $N \notin C$, $c - d \neq 0$, donc $p_N(C)$ a pour équation

$$(c-d)x^2 + (c-d)y^2 + 2ax + 2by = d+c.$$

Sachant que l'ensemble des solutions contient une infinité d'éléments, c'est bien l'équation d'un cercle. □

Ce résultat suggère la définition suivante.

Définition 4.33. Un **cercle généralisé** dans $\widehat{\mathbb{C}}$ est un sous-ensemble C de $\widehat{\mathbb{C}}$ tel que soit C est un cercle de \mathbb{R}^2 , soit $C = L \cup \{\infty\}$ avec L une droite de \mathbb{R}^2 .

Corollaire 4.34. La projection stéréographique induit une bijection entre les cercles de \mathbb{S}^2 et les cercles généralisés de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Par le Théorème 4.32, il reste à montrer que la pré-image $p_N^{-1}(C)$ d'un cercle généralisé de $\widehat{\mathbb{C}}$ est bien un cercle de \mathbb{S}^2 . Si $C = L \cup \{\infty\}$, alors $p_N^{-1}(C) = \Pi_C \cap \mathbb{S}^2$, où Π_C est le plan de \mathbb{R}^3 engendré par la droite $L \subset \Pi_{z=0} \subset \mathbb{R}^3$ et le point N . C'est donc bien un cercle de \mathbb{S}^2 .

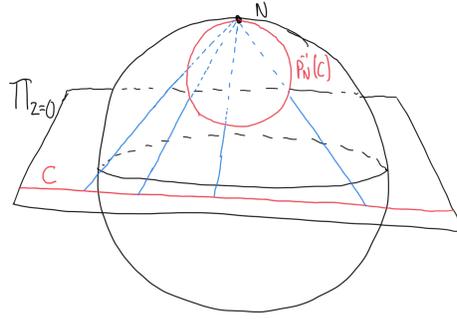


FIGURE 50 – Cas où $C = L \cup \{\infty\}$

Si C est plutôt un cercle d'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad (4.5)$$

en substituant la formule pour $p_N(x, y, z)$ dans (4.5), on voit qu'un point $(x, y, z) \in p_N^{-1}(C)$ est tel que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{1-z} - a\right)^2 + \left(\frac{y}{1-z} - b\right)^2 = r^2 &\implies (x - a(1-z))^2 + (y - b(1-z))^2 = r^2(1-z)^2 \\ \implies x^2 - 2a(1-z)x + a^2(1-z)^2 + y^2 - 2b(1-z)y + b^2(1-z)^2 &= r^2(1-z)^2 \\ \implies -2a(1-z)x - 2b(1-z)y = (r^2 - a^2 - b^2)(1-z)^2 - (1-z)^2, &\text{ car } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ \implies -2ax - 2by = (r^2 - a^2 - b^2)(1-z) - (z+1), &\text{ car } 1 - z^2 = (1-z)(1+z), \\ \implies 2ax + 2by + (-1 - r^2 + a^2 + b^2)z = -(r^2 - a^2 - b^2) + 1. & \end{aligned}$$

Cela montre que $p_N^{-1}(C) = \Pi_C \cap \mathbb{S}^2$ avec Π_C le plan d'équation

$$2ax + 2by + (-1 - r^2 + a^2 + b^2)z = -(r^2 - a^2 - b^2) + 1,$$

c'est-à-dire que $p_n^{-1}(C)$ est bien à nouveau un cercle. \square

4.4 Problèmes

Problème 4.1. Pour toute partition de la sphère \mathbb{S}^2 en triangles sphériques, montrer que $S - A + F = 2$, où S est le nombre total de sommets, A est le nombre total d'arcs de grands cercles de la partition et F est le nombre de triangles de la partition. Suggestion : Utiliser le théorème sur la somme des angles intérieurs d'un triangle sphérique.

Problème 4.2. Soit T un triangle sphérique de sommets A, B, C et de côtés a, b, c sur une sphère de rayon $r > 0$. Soient α, β et γ les angles internes mesurés en radians du triangle T aux sommets A, B et C . Déduire du Théorème 4.18 des notes de cours que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\text{aire}(T)}{r^2},$$

où $\text{aire}(T)$ est l'aire du triangle T sur la sphère de rayon r .

Problème 4.3. (Théorème de Pythagore sphérique) Soit T un triangle sphérique de sommets A, B, C et de côtés a, b, c . Supposons que l'angle intérieur en C est de $\frac{\pi}{2}$. Soit θ_a, θ_b et θ_c les longueurs des arcs de grand cercle a, b et c respectivement. On souhaite établir l'analogie sphérique du théorème de Pythagore.

- a) Quitte à appliquer une isométrie de \mathbb{S}^2 , montrer qu'on peut supposer que $A = \vec{r}_1 := (\sin \theta_b, 0, \cos \theta_b)$, $B = \vec{r}_2 := (0, \sin \theta_a, \cos \theta_a)$ et $C = \vec{k} = (0, 0, 1)$.
- b) En déduire que $\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = \langle \vec{r}_1, \vec{k} \rangle \langle \vec{r}_2, \vec{k} \rangle$.
- c) Formuler le résultat précédent en termes des angles θ_a, θ_b et θ_c pour obtenir le théorème de Pythagore sphérique :

$$\cos \theta_c = \cos \theta_a \cos \theta_b. \quad (4.6)$$

- d) Lorsque les longueurs θ_a, θ_b et θ_c sont petites, est-ce que le théorème de Pythagore dans sa version euclidienne donne une bonne approximation de la formule (4.6).

Problème 4.4. Soient $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre infini d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et $\mu : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathcal{C}$ l'application définie par $\mu(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = (\cos \phi, \sin \phi, \ln \rho)$.

- a) Montrer que l'application μ préserve les angles.
- b) En conclure que la projection de Mercator, définie par $M := \mu \circ p_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow \mathcal{C}$, préserve les angles.

5 Géométrie inversive



Il gufo, aquarelle de Loredana Roberti

La **géométrie inversive** est obtenue de la géométrie de la sphère \mathbb{S}^2 du chapitre précédent en oubliant la notion de distance, mais en gardant la notion d'angle entre des courbes se coupant. En utilisant la projection stéréographique et le Théorème 4.28, on peut de manière équivalente dire que la géométrie inversive est la géométrie qui étudie les angles entre des courbes se coupant sur le plan étendu de la Définition 4.30.

5.1 Les transformations conformes et les inversions

Introduisons dans un premier temps les symétries naturelles associées à la géométrie inversive.

Définition 5.1. Une **transformation conforme** $t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est une bijection qui préserve les angles, c'est-à-dire que si C_1 et C_2 sont deux courbes se coupant en P pour former un angle θ , alors $t(C_1)$ et $t(C_2)$ se coupent en $t(P)$ pour former un angle ϕ tel que $\cos \phi = \cos \theta$.

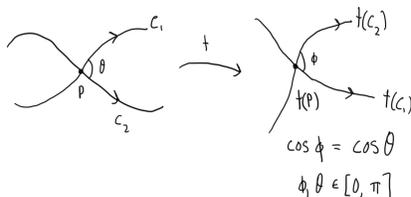


FIGURE 51 – Transformation conforme t

Remarque 5.2. Si C_1 et C_2 sont orientées, alors sous l'action d'une transformation conforme, l'ordre horaire ou anti-horaire dans lequel C_1 et C_2 se coupent en P peut changer comme le montre la Figure 51. Si l'ordre ne change pas, on dit que t **préserve l'orientation**.

Exercice 5.3. Montrer que les transformations conformes forment un groupe lorsque munies de l'opération de composition.

Exemple 5.4. Soit $t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ une isométrie de \mathbb{S}^2 . Alors t préserve les angles, donc

$$\widehat{t} = p_N \circ t \circ p_N^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

induit une transformation conforme sur le plan étendu $\widehat{\mathbb{C}}$.

Exercice 5.5. Soit

$$i_E : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \rightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y, -z) \end{array}$$

l'isométrie donnée par la réflexion par rapport au plan d'équation $z = 0$.

- a) Montrer que l'application $\widehat{i}_E := p_N \circ i_E \circ p_N^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ telle que définie dans l'Exemple 5.4 est donnée par

$$\widehat{i}_E(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ \infty, & (x, y) = (0, 0), \\ 0, & (x, y) = \infty. \end{cases}$$

- b) En coordonnées complexes, montrer que $\widehat{i}_E(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z} = \overline{x+iy} = x-iy$ est le conjugué complexe de $z = x+iy$.

Exemple 5.6. Pour $r > 0$, l'homothétie

$$\begin{aligned} h_r : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto rz \end{aligned} \tag{5.1}$$

préserve les angles. On peut l'étendre à $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant $h_r(\infty) = \infty$. Si \widehat{i}_E est la transformation conforme de l'Exercice 5.5, on voit que

$$\widehat{i}_E \circ h_r \circ \widehat{i}_E(z) = \widehat{i}_E\left(\frac{r}{z}\right) = \frac{z}{r}$$

est aussi une homothétie, ce qui montre que h_r préserve aussi les angles au point à l'infini.

Exemple 5.7. Une transformation orthogonale $A \in O(2)$ induit par inclusion $O(2) \subset O(3)$ une transformation orthogonale de \mathbb{R}^3 , et par restriction une isométrie \mathcal{I}_A de \mathbb{S}^2 . Clairement, $\mathcal{I}_A = p_N^{-1} \circ A \circ p_N$, de sorte qu'en prolongeant A en une application $\widehat{A} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ en posant $\widehat{A}(\infty) = \infty$, on obtient une transformation conforme de $\widehat{\mathbb{C}}$ par l'Exemple 5.4.

Exemple 5.8. Pour $w \in \mathbb{C}$, la translation

$$\begin{aligned} t_w : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z + w \end{aligned}$$

induit une isométrie de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, donc préserve les angles sur \mathbb{C} . En posant $t_w(\infty) = \infty$, cette translation se prolonge en une bijection $t_w : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ du plan étendu. Comme

$$\widehat{i}_E \circ t_w \circ \widehat{i}_E = \widehat{i}_E\left(\frac{1}{z} + w\right) = \frac{1}{\frac{1}{z} + \overline{w}} = \frac{z}{1 + \overline{w}z} = z \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-\overline{w}z)^k\right), \quad \text{pour } |z| \text{ petit,}$$

on voit que t_w préserve aussi les angles en $z = \infty$ car $\widehat{i}_E \circ t_w \circ \widehat{i}_E$ préserve les angles en $z = x + iy = 0$, la différentielle de cette application à l'origine étant simplement l'identité.

Exemple 5.9. Les isométries de \mathbb{R}^2 préservent les distances, donc les angles. Si $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une isométrie de \mathbb{R}^2 , on peut étendre t à $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant $t(\infty) = \infty$. Comme t est la composition d'une transformation orthogonale et d'une translation, on voit par les Exemples 5.7 et 5.8 que t induit bien une transformation conforme $\widehat{t} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

Définition 5.10. Soit C un cercle de rayon r et de centre Q dans \mathbb{R}^2 . **L'inversion** $\widehat{i}_C : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est l'application telle que $\widehat{i}_C(Q) = \infty$, $\widehat{i}_C(\infty) = Q$, et si $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{Q\}$, alors $\widehat{i}_C(P) = P'$, où P' est le point sur la droite QP du même côté de Q que P et tel que $\overline{QP} \cdot \overline{QP'} = r^2$. En particulier, si $P \in C$, alors $P' = P$. De même, si P est à l'intérieur de C alors P' est à l'extérieur de C et vice versa.

Exemple 5.11. La transformation conforme \widehat{i}_E de l'Exercice 5.5 correspond à l'inversion par rapport au cercle unité centré à l'origine, autrement dit l'inversion par rapport à l'équateur $E := \mathbb{S}^2 \cap \Pi_{z=0}$ de \mathbb{S}^2 .

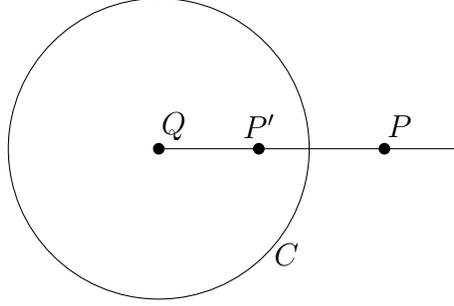


FIGURE 52 – L'inversion \widehat{i}_C associée au cercle C

Exercice 5.12. Soient O , P et Q des points distincts de \mathbb{R}^2 . Soient P' et Q' les images de P et Q sous l'inversion par rapport à un cercle de centre O et de rayon r . Montrer que

$$\overline{P'Q'} = \frac{r^2}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} \overline{PQ}.$$

Exercice 5.13. Montrer que l'homothétie $h_r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une composition de deux inversions.

On peut étendre la définition d'inversion aux cercles généralisés.

Définition 5.14. Si $C = L \cup \{\infty\}$ est un cercle généralisé qui n'est pas un cercle, alors l'**inversion** $\widehat{i}_C : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est l'application se restreignant à la réflexion par rapport à la droite L sur le plan \mathbb{R}^2 et telle que $\widehat{i}_C(\infty) = \infty$.

Proposition 5.15. L'inversion \widehat{i}_C associée à un cercle généralisé est une transformation conforme.

Démonstration. Si $C = L \cup \{\infty\}$, alors \widehat{i}_C est induite par une isométrie de \mathbb{R}^2 , donc est une transformation conforme par l'Exemple 5.9. Si C est plutôt un cercle de rayon r et de centre P , alors si $t_P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est la translation envoyant l'origine sur P et si h_r est l'homothétie définie en (5.1), alors $t_P \circ h_r$ envoie le cercle unité centré à l'origine sur C et

$$h_r^{-1} \circ t_P^{-1} \circ \widehat{i}_C \circ t_P \circ h_r = \widehat{i}_E$$

est l'inversion par rapport au cercle unité centré à l'origine, où $h_r^{-1} = h_{r^{-1}}$ est aussi une homothétie. On a donc que

$$\widehat{i}_C = t_P \circ h_r \circ \widehat{i}_E \circ h_r^{-1} \circ t_P^{-1}.$$

Comme chacune des transformations dans le terme de droite est conforme, on conclut par l'Exercice 5.3 que \widehat{i}_C est bien une transformation conforme. \square

On va montrer ultimement que les inversions engendrent toutes les transformations conformes. Avant d'arriver à ce résultat, il est toutefois commode pour l'instant d'introduire la notion suivante.

Définition 5.16. Une **transformation inversive** $t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est une transformation donnée par une composition d'un nombre fini d'inversions de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Exemple 5.17. Par l'Exercice 5.13 et le Problème 1.12, les homothéties, les translations et les réflexions sont des transformations inversives.

Exercice 5.18. Montrer que l'ensemble des transformations inversives, munis de l'opération de composition, est un groupe.

Comme les inversions sont des transformations conformes, on a le résultat suivant.

Proposition 5.19. *Les transformations inversives sont des transformations conformes.*

Démonstration. Comme toutes les inversions sont des transformations conformes et que les transformations conformes forment un groupe, on voit que les transformations inversives sont bien des transformations conformes. \square

Les transformations inversives se comportent bien aussi par rapport aux cercles généralisés.

Théorème 5.20. *Une transformation inversive envoie un cercle généralisé sur un cercle généralisé.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'une inversion $\widehat{i}_C : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ envoie un cercle généralisé sur un cercle généralisé. Si $C = L \cup \{\infty\}$ n'est pas un cercle, alors \widehat{i}_C restreinte au plan \mathbb{R}^2 envoie un cercle sur un cercle et une droite sur une droite, donc un cercle généralisé sur un cercle généralisé. De même, le prolongement au plan étendu d'une translation ou d'une homothétie envoie un cercle généralisé sur un cercle généralisé. Ainsi, si \widehat{i}_C est l'inversion par rapport à un cercle C de rayon r et de centre P , alors comme

$$\widehat{i}_C = t_P \circ h_r \circ \widehat{i}_E \circ h_r^{-1} \circ t_P^{-1}$$

par la preuve de la Proposition 5.15, il suffit de montrer que l'inversion $\widehat{i}_E : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ envoie un cercle généralisé sur un cercle généralisé. Or, par l'Exercice 5.5,

$$i_E = p_N^{-1} \circ \widehat{i}_E \circ p_N : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

est une isométrie de \mathbb{S}^2 , plus précisément l'isométrie engendrée par la réflexion par rapport au plan $\Pi_{z=0}$ dans \mathbb{R}^3 . En particulier, i_E envoie un cercle de \mathbb{S}^2 sur un cercle de \mathbb{S}^2 . Par le Corollaire 4.34, cela signifie que \widehat{i}_E envoie un cercle généralisé sur un cercle généralisé, d'où le résultat. \square

5.2 Les transformations de Möbius

On va maintenant considérer un cas particulier de transformation inversive.

Définition 5.21. Une **transformation de Möbius** est une bijection $M : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de la forme

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ avec } ad - bc \neq 0.$$

Si $c = 0$, on convient que $M(\infty) = \infty$. Autrement, on convient que $M(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $M(\infty) = \frac{a}{c}$. On dénote par $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$ l'ensemble des transformations de Möbius.

Exemple 5.22. Une application

$$M : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto az + b$$

est une transformation de Möbius avec $d = 1$, $c = 0$ pourvu que $a \neq 0$.

Exemple 5.23. L'application

$$M : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

est une transformation de Möbius avec $a = d = 0$ et $c = b = 1$.

Proposition 5.24. *Toutes les transformations de Möbius sont des transformations inversives.*

Démonstration. Soit $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ une transformation de Möbius. Si $c = 0$, alors

$$M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Si $\frac{a}{d} = re^{i\theta}$, alors $M = t \circ h_r \circ R_\theta$ où

$$R_\theta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto e^{i\theta}z$$

est la rotation par un angle θ dans le sens anti-horaire,

$$h_r : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto rz$$

est une homothétie et

$$t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto z + \frac{b}{d}$$

est une translation. Par l'Exemple 5.17, ce sont donc des inversions et M est donc une transformation inversive. Si $c \neq 0$, alors pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$,

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d) - ad + bc}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$$

$$= \left(\frac{bc - ad}{c}\right) \left(\frac{1}{cz + d}\right) + \frac{a}{c},$$

donc M est une composition de rotations, d'homothéties, de translations, de l'inversion \widehat{i}_E et de la réflexion $z \mapsto \bar{z}$. La transformation de Möbius est donc bien une composition de transformations inversives et est donc une transformation inversive. \square

Soit $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ le groupe des matrices 2 par 2 inversibles à entrées complexes. À une matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}),$$

on peut associer la transformation de Möbius

$$M_{\mathbb{A}}(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

En effet, comme \mathbb{A} est inversible, on a bien que

$$ad - bc = \det(\mathbb{A}) \neq 0.$$

Lemme 5.25. *Si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$, alors $M_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = M_{\mathbb{A}} \circ M_{\mathbb{B}}$. En particulier, la composition de deux transformations de Möbius est une transformation de Möbius.*

Démonstration. Si $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, alors

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \implies M_{\mathbb{A}\mathbb{B}}(z) = \frac{(ae + bg)z + af + bh}{(ce + dg)z + cf + dh}.$$

Or, on calcule que

$$M_{\mathbb{A}} \circ M_{\mathbb{B}}(z) = M_{\mathbb{A}}\left(\frac{ez + f}{gz + h}\right) = \frac{a\left(\frac{ez + f}{gz + h}\right) + b}{c\left(\frac{ez + f}{gz + h}\right) + d} = \frac{a(ez + f) + b(gz + h)}{c(ez + f) + d(gz + h)} = M_{\mathbb{A}\mathbb{B}}(z).$$

□

Lemme 5.26. *L'inverse d'une transformation de Möbius est aussi une transformation de Möbius.*

Démonstration. Si $\mathbb{A} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$, alors $M_{\mathbb{A}^{-1}} \circ M_{\mathbb{A}} = M_{\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}} = M_{\mathbb{I}}$. Comme

$$M_{\mathbb{I}}(z) = \frac{z + 0}{0 + 1} = z,$$

$M_{\mathbb{I}}$ est l'application identité et $M_{\mathbb{A}^{-1}}$ est bien l'inverse de $M_{\mathbb{A}}$. □

Théorème 5.27. *Les transformations de Möbius munies de l'opération de composition forment un groupe.*

Démonstration. Le Lemme 5.25 montre que la composition de deux transformations de Möbius est à nouveau une transformation de Möbius. Le Lemme 5.26 et sa preuve montre que l'inverse d'une transformation de Möbius est aussi une transformation de Möbius et que l'identité est bien une transformation de Möbius. Par le Lemme 1.23, les transformations de Möbius munies de l'opération de composition forment bien un groupe. □

Dans la terminologie du cours de théorie des groupes MAT2250, on peut reformuler ce résultat de la manière suivante.

Corollaire 5.28. *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : \text{GL}(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) \\ \mathbb{A} &\mapsto M_{\mathbb{A}} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes.

Les inversions ne sont pas des transformations de Möbius, mais on peut les écrire en termes d'une transformation de Möbius de la manière suivante.

Théorème 5.29. *Si $\widehat{\iota}_C : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est l'inversion associée à un cercle généralisé C , alors il existe une transformation de Möbius M telle que*

$$\widehat{\iota}_C(z) = M(\bar{z}) \quad \forall z \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Démonstration. Si $C = L \cup \{\infty\}$ est une droite prolongée, alors $\widehat{\iota}_C$ est la réflexion par rapport à la droite L . Soit

$$\begin{aligned} t : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^{i\theta}z + w \end{aligned}$$

une isométrie de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ qui envoie la droite d'équation $y = 0$ sur la droite L . Dans ce cas, $\widehat{\iota}_C = t \circ R_{y=0} \circ t^{-1}$, où

$$\begin{aligned} R_{y=0} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

est la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = 0$. Or, $t = M_{\mathbb{A}}$ avec $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que

$$\mathbb{A}^{-1} = e^{-i\theta} \begin{pmatrix} 1 & -w \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & -we^{-i\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies t^{-1}(z) = M_{\mathbb{A}^{-1}}(z) = e^{-i\theta}z - we^{-i\theta}.$$

Ainsi, on calcule que

$$\begin{aligned} \widehat{\iota}_C(z) &= t \circ R_{y=0} \circ t^{-1}(z) = t\left(\overline{e^{-i\theta}z - we^{-i\theta}}\right) = t(e^{i\theta}\bar{z} - \bar{w}e^{i\theta}) \\ &= e^{i\theta}(e^{i\theta}\bar{z} - \bar{w}e^{i\theta}) + w = e^{2i\theta}\bar{z} + (w - \bar{w}e^{2i\theta}), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\widehat{\iota}_C = M_{\mathbb{B}}(z)$ avec $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} e^{2i\theta} & w - \bar{w}e^{2i\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si C est plutôt un cercle de \mathbb{C} , soit $N : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la transformation de Möbius de la forme $N(z) = az + b$ envoyant le cercle unité de centre 0 sur C , de sorte que $\widehat{\iota}_C = N \circ \widehat{\iota}_E \circ N^{-1}$. Or, comme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on voit que $N^{-1}(z) = \frac{z-b}{a}$. Ainsi, on a que

$$\widehat{\iota}_C(z) = N \circ \widehat{\iota}_E \left(\frac{z-b}{a} \right) = N \left(\frac{\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}} \right) = a \left(\frac{\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}} \right) + b = \frac{b(\bar{z}-\bar{b}) + a\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}}.$$

On a donc que $\widehat{i}_C(z) = M(\bar{z})$, où M est la transformation de Möbius

$$M(z) = \frac{bz + (a\bar{a} - b\bar{b})}{z - \bar{b}}$$

□

Quitte à possiblement composer avec la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire quitte à possiblement composer avec la conjugaison complexe, on peut décrire toutes les transformations inversives à l'aide des transformations de Möbius comme le montre le résultat suivant.

Corollaire 5.30. *Une transformation inversive est de la forme $M \circ R_{y=0}^j$ avec M une transformation de Möbius, $j \in \{0, 1\}$ et $R_{y=0} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = 0$.*

Démonstration. Soit $t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une transformation inversive. Par le Théorème 5.29,

$$t = (M_1 \circ R_{y=0}) \circ (M_2 \circ R_{y=0}) \circ \cdots \circ (M_k \circ R_{y=0})$$

avec M_1, M_2, \dots, M_k des transformations de Möbius. Si $M_j(z) = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}$, dénotons par \overline{M}_j la transformation de Möbius donnée par

$$\overline{M}_j(z) = \frac{\bar{a}_j z + \bar{b}_j}{\bar{c}_j z + \bar{d}_j}.$$

On a alors que $R_{y=0} \circ M_j = \overline{M}_j \circ R_{y=0}$. Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} t &= (M_1 \circ R_{y=0}) \circ (M_2 \circ R_{y=0}) \circ \cdots \circ (M_k \circ R_{y=0}) \\ &= M_1 \circ \overline{M}_2 \circ M_3 \circ \cdots \circ N_k \circ R_{y=0}^k, \quad \text{avec } N_k = \begin{cases} \overline{M}_k, & k \text{ pair,} \\ M_k, & k \text{ impair,} \end{cases} \\ &= M \circ R_{y=0}^j, \end{aligned}$$

avec $j = 0$ si k est pair et $j = 1$ si k est impair, car $R_{y=0}^2 = \text{Id}$, où

$$M := M_1 \circ \overline{M}_2 \circ M_3 \circ \cdots \circ N_k.$$

□

5.3 Les transformations conformes sont des transformations inversives

On va maintenant montrer que toutes les transformations conformes sont des transformations inversives. Pour y arriver, on devra faire appel à quelques notions et résultats du cours d'Analyse Complexe I (MAT2160).

Définition 5.31 (analyse complexe). Une fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ sur un sous-ensemble (ouvert) $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ est une fonction **holomorphe** si pour tout $z_0 \in \mathcal{U}$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{pour } z \text{ près de } z_0,$$

où les coefficients a_k dépendent de z_0 et la série à droite converge près de z_0 .

Exemple 5.32. La fonction exponentielle $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ est une fonction holomorphe.

Exemple 5.33. Un polynôme de degré k $P_k(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0$ est une fonction holomorphe.

Les transformations conformes sont en fait intimement liées aux fonctions holomorphes.

Théorème 5.34 (Analyse Complexe). *Soit $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une transformation conforme qui préserve l'orientation et telle que $f(z_\infty) = \infty$ et $f(\infty) = w$. Alors $f : \mathbb{C} \setminus \{z_\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe. De plus, si $z_\infty \neq \infty$, alors*

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_\infty)^k$$

pour z près de z_∞ et un certain $a_{-1} \neq 0$, alors que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

pour $|z|$ assez grand, c'est-à-dire assez «près» de l'infini. Si plutôt $z_\infty = \infty = w$, alors

$$f(z) = c_{-1} z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

pour $|z|$ assez grand et un certain $c_{-1} \neq 0$.

En fait, la plupart des coefficients de ces séries sont nuls. Pour le voir, il faut invoquer un autre résultat du cours d'Analyse Complexe I (MAT2160), à savoir le théorème de Liouville.

Théorème 5.35 (Liouville). *Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(z)| \leq C$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est une fonction constante.*

En effet, le théorème de Liouville combiné au Théorème 5.34 nous permet d'obtenir une caractérisation beaucoup plus fine des transformations conformes préservant l'orientation.

Théorème 5.36. *Une transformation conforme $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ préservant l'orientation est forcément une transformation de Möbius.*

Démonstration. Soit $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une transformation conforme préservant l'orientation. Soient z_∞ et w les points de $\widehat{\mathbb{C}}$ tels que $f(z_\infty) = \infty$ et $f(\infty) = w$. Soit aussi $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ le point tel que $f(z_0) = 0$. Si $z_\infty = \infty = w$, alors par le Théorème 5.34

$$g(z) := \frac{f(z)}{z - z_0}$$

est une fonction holomorphe bornée, donc par le théorème de Liouville, il existe une constante $C \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $g(z) = C$, c'est-à-dire que $f(z) = C(z - z_0)$ est bien une transformation de Möbius. Si plutôt $z_\infty \neq \infty$ et si de plus $z_0 \neq \infty$, alors par le Théorème 5.34

$$g(z) := \frac{z - z_\infty}{z - z_0} f(z)$$

est une fonction holomorphe bornée. Par le théorème de Liouville, il existe donc une constante $C \in \mathbb{C}^*$ telle que $g(z) = C$, c'est-à-dire que

$$f(z) = C \frac{z - z_0}{z - z_\infty}$$

est bien à nouveau une transformation de Möbius. Enfin, si $z_\infty \neq 0$, mais que $z_0 = \infty$, alors par le Théorème 5.34,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

pour $|z|$ assez grand, de sorte que

$$g(z) := (z - z_\infty)f(z)$$

est holomorphe et bornée. Par le théorème de Liouville, il existe donc une constante $C \in \mathbb{C}^*$ telle que $g(z) = C$, c'est-à-dire que

$$f(z) = \frac{C}{z - z_\infty}$$

est une transformation de Möbius. □

Si on omet la condition sur l'orientation, cela donne le résultat suivant.

Corollaire 5.37. *Une transformation conforme est forcément une transformation inversive.*

Démonstration. Soit $t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une transformation conforme. Si t préserve l'orientation, t est une transformation inversive par le résultat précédent. Si t ne préserve pas l'orientation, alors $t \circ \widehat{i}_E$ préserve l'orientation. Par le Théorème 5.36, $t \circ \widehat{i}_E = M$ pour une certaine transformation de Möbius, donc $t = M \circ \widehat{i}_E$ est bien une transformation inversive. □

Remarque 5.38. Ce résultat est une manifestation du principe GAGA (Géométrie Analytique-Géométrie Algébrique) de Jean-Pierre Serre [Ser56]. Ce principe stipule que dans certaines situations, la géométrie analytique et la géométrie algébrique coïncident. Dans notre cas, les transformations conformes préservant l'orientation sont associées à la géométrie analytique, alors que les transformations de Möbius sont associées à la géométrie algébrique.

5.4 Le théorème fondamental de la géométrie inversive

Maintenant qu'on a une description détaillée des symétries de la géométrie inversive, on peut formuler son théorème fondamental.

Théorème 5.39 (Théorème fondamental de la géométrie inversive). *Soient (z_1, z_2, z_3) et (w_1, w_2, w_3) deux triplets de points distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$. Alors il existe une unique transformation de Möbius envoyant (z_1, z_2, z_3) et (w_1, w_2, w_3) .*

Démonstration. Cherchons d'abord une transformation de Möbius M_1 envoyant (z_1, z_2, z_3) sur $(0, 1, \infty)$. Si $M_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, alors

$$M_1(z_1) = 0 \implies M_1(z) = K \left(\frac{z - z_1}{cz + d} \right) \quad \text{ou} \quad M_1(z) = \frac{b}{cz + d} \quad \text{avec} \quad c \neq 0, \text{ si } z_1 = \infty.$$

De même, on voit que

$$M_1(z_3) = \infty \implies M_1(z) = K' \left(\frac{z - z_1}{z - z_3} \right) \quad \text{ou} \quad M_1(z) = K'(z - z_1) \quad \text{si } z_3 = \infty,$$

alors que

$$M_1(z_2) = 1 \implies K' \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \right) = 1 \implies K' = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad \text{ou} \quad K' = 1 \quad \text{si } z_2 = \infty.$$

Donc l'unique transformation de Möbius envoyant (z_1, z_2, z_3) sur $(0, 1, \infty)$ est donnée par

$$M_1(z) = K' \left(\frac{z - z_1}{z - z_3} \right) \quad \text{avec} \quad K' = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

De même, il existe une unique transformation de Möbius M_2 envoyant (w_1, w_2, w_3) sur $(0, 1, \infty)$. Ainsi, $M = M_2^{-1} \circ M_1$ envoie (z_1, z_2, z_3) sur (w_1, w_2, w_3) . Si M' est une autre telle transformation, alors $M_2 \circ M'$ envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(0, 1, \infty)$. Par unicité d'une telle transformation de Möbius,

$$M_2 \circ M' = M_1 \implies M' = M_2^{-1} \circ M_1 = M.$$

□

Remarque 5.40. En identifiant $\widehat{\mathbb{C}}$ avec la droite projective complexe \mathbb{CP}^1 , le théorème précédent peut être vu comme un résultat de géométrie projective complexe sur les transformations projectives de \mathbb{CP}^1 . Un résultat similaire est valide pour la droite projective réelle \mathbb{RP}^1 .

Corollaire 5.41. *Soient P, Q et R trois points distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$. Alors il existe un unique cercle généralisé C passant par P, Q et R .*

Démonstration. Soit $M : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ l'unique transformation de Möbius envoyant $0, 1$ et ∞ sur P, Q et R . Comme la droite

$$L := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$$

passé par 0 et 1 , on voit que $C := L \cup \{\infty\}$ est l'unique cercle généralisé passant par $0, 1$ et ∞ . En effet, comme $\infty \in C$, C doit être l'union du point à l'infini avec une droite, et pour que 0 et 1 soient aussi contenus dans C , il faut que cette droite soit précisément celle passant par 0 et 1 .

En posant $C' := M(C)$, on voit que C' est un cercle généralisé passant par $P = M(0)$, $Q = M(1)$ et $R = M(\infty)$. Si C'' est un autre tel cercle généralisé, alors $M^{-1}(C'')$ passe par $0, 1$ et ∞ , donc par unicité

$$M^{-1}(C'') = L \cup \{\infty\} = C \implies C'' = M(C) = C',$$

d'où l'unicité de C' . □

Corollaire 5.42. *Soient P, Q, R trois points distincts de \mathbb{C} qui ne sont pas colinéaires. Alors il existe un unique cercle C dans \mathbb{C} passant par P, Q et R .*

Démonstration. Par le corollaire précédent, il existe un unique cercle généralisé C passant par P, Q et R . Comme ces points ne sont pas colinéaires dans \mathbb{C} , C n'est pas l'union d'une droite avec $\{\infty\}$, donc est un cercle. □

5.5 Faisceaux de cercles

Pour $P \in \mathbb{C}$, le **faisceau**¹ de cercles \mathcal{F}_P est l'ensemble des cercles concentriques centrés en P . Qu'arrive-t-il à ce faisceau de cercles lorsqu'on applique une transformation inversive? Clairement, si $t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est une transformation inversive induite par une isométrie de \mathbb{R}^2 , alors le faisceau est envoyé par t sur le faisceau $\mathcal{F}_{t(P)}$ des cercles concentriques centrés en $t(P)$. De même, si t est l'inversion par rapport à l'un des cercles de ce faisceau, alors t envoie ce faisceau sur elle-même.

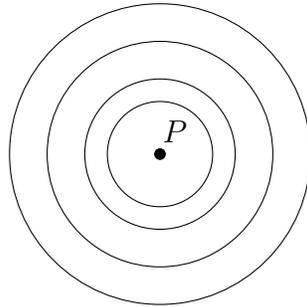


FIGURE 53 – Faisceau \mathcal{F}_P des cercles concentriques centrés en P

1. En géométrie, le terme *faisceau* est utilisé pour décrire des familles linéaires d'objets. C'est effectivement le cas pour les faisceaux de cercles qui sont présentés dans cette section, c'est-à-dire qu'ils peuvent être vus comme des droites dans l'espace (projectif) des cercles généralisés, voir par exemple [Aud06, § VII.6].

Plus généralement, soient $A \in \mathbb{C} \setminus \{P\}$ et C un cercle de rayon r centré en A . Considérons l'inversion $\widehat{\iota}_C : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ associée au cercle C et posons $B := \widehat{\iota}_C(P)$. Si $C_1 \in \mathcal{F}_P$ et $Q \in C_1$, posons aussi $Q' := \widehat{\iota}_C(Q)$. Par l'Exercice 5.12, on a que

$$\overline{BQ'} = \frac{r^2}{\overline{AQ} \cdot \overline{AP}} \overline{PQ} = \frac{r^2 \rho}{d} \frac{1}{\overline{AQ}},$$

où ρ est le rayon du cercle C_1 et $d := \overline{AP}$, de sorte que

$$\overline{AQ'} = \frac{r^2}{\overline{AQ}} = \frac{d}{\rho} \overline{BQ'}.$$

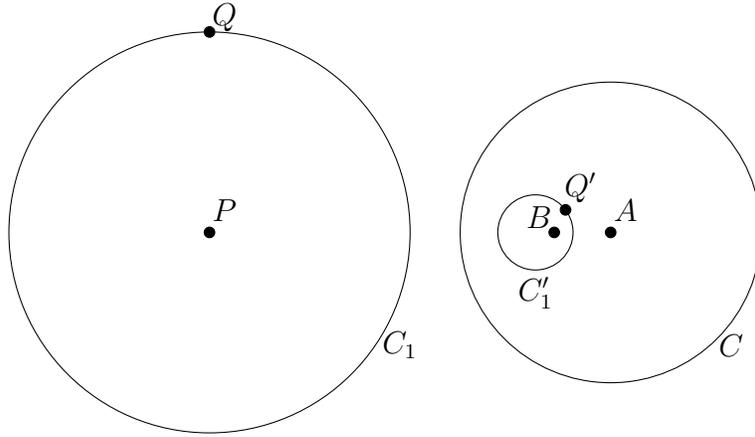


FIGURE 54 – Inversion par rapport au cercle C

Cela montre que

$$Q' \in C'_1 := \widehat{\iota}_C(C_1) \implies \overline{AQ'} = \frac{d}{\rho} \overline{BQ'}.$$

Inversement, si $Q' \in \mathbb{C}$ est tel que $\overline{AQ'} = \frac{d}{\rho} \overline{BQ'}$, alors

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \frac{r^2}{\overline{AQ'} \cdot \overline{AB}} \overline{BQ'}, \quad \text{par l'Exercice 5.12,} \\ &= \frac{r^2}{\left(\frac{d}{\rho} \overline{BQ'}\right) \overline{AB}} \overline{BQ'} = \frac{r^2 \rho}{d \overline{AB}} = \frac{r^2 \rho}{\overline{AP} \cdot \overline{AB}} \\ &= \frac{r^2 \rho}{r^2} = \rho, \quad \text{car } B = \widehat{\iota}_C(P) \implies \overline{AB} d = \overline{AB} \cdot \overline{AP} = r^2. \end{aligned}$$

Cela montre que

$$\overline{AQ'} = \frac{d}{\rho} \overline{BQ'} \implies Q \in C_1.$$

On a donc établi que

$$Q' \in C'_1 := \widehat{\iota}_C(C_1) \iff \overline{AQ'} = \frac{d}{\rho} \overline{BQ'}. \quad (5.2)$$

Comme $C_1 \in \mathcal{F}_P$ était quelconque, on a donc que $\widehat{i}_C(\mathcal{F}_P)$ est l'ensemble des cercles généralisés donnés par

$$\widehat{C}_k := \{Q \in \mathbb{C} \mid \overline{AQ} = k\overline{BQ}\} \quad \text{pour } k = \frac{d}{\rho} \in (0, \infty). \quad (5.3)$$

En particulier, si $k = 1$, \widehat{C}_1 correspond à la médiatrice du segment AB . Comme la réflexion par rapport à la médiatrice \widehat{C}_1 interchange A et B , elle envoie \widehat{C}_k sur $\widehat{C}_{\frac{1}{k}}$ et vice versa.

Définition 5.43. Le faisceau de cercles \mathcal{F}_{AB} avec points limites A et B est l'ensemble de cercles généralisés (5.3). La médiatrice \widehat{C}_1 du segment AB est l'**axe radical** du faisceau \mathcal{F}_{AB} . On dit aussi que \mathcal{F}_{AB} est un faisceau de cercles d'Appollonius.

Remarque 5.44. Comme $\widehat{i}_C(\mathcal{F}_P) = \mathcal{F}_{AB}$, il est clair que chaque membre du faisceau est un cercle généralisé et que, sauf pour la médiatrice \widehat{C}_1 , ce sont tous des cercles. De plus, toute inversion $t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de centre A envoie le faisceau \mathcal{F}_{AB} sur le faisceau de cercles concentriques \mathcal{F}_P pour $P := t(B)$ et vice versa.

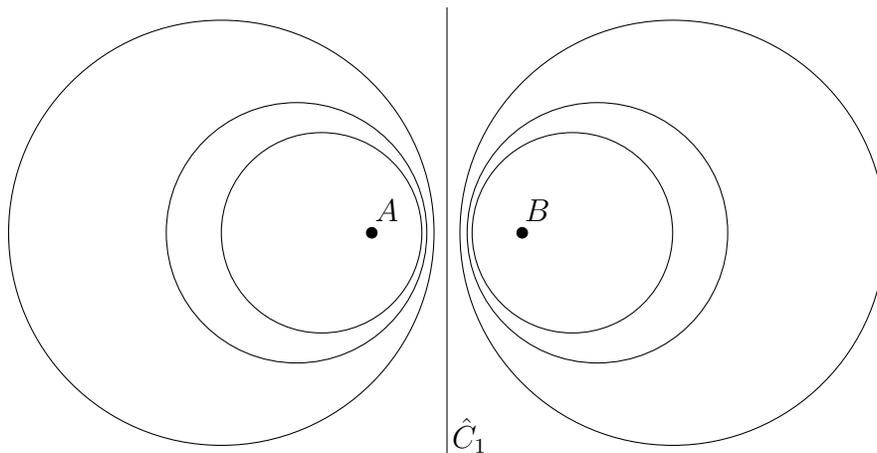


FIGURE 55 – Faisceau de cercles \mathcal{F}_{AB} avec points limites

Pour $P \in \mathbb{C}$, considérons maintenant le faisceau \mathcal{F}_P^\perp correspondant à l'ensemble des cercles généralisés passant par P et le point à l'infini. Ces cercles généralisés sont tous de la forme $L \cup \{\infty\}$ avec L une droite de \mathbb{R}^2 passant par P . Clairement, chaque membre de \mathcal{F}_P^\perp coupe chaque membre de \mathcal{F}_P perpendiculairement. Comme le montre l'exercice suivant, les cercles généralisés de \mathcal{F}_P^\perp sont les seuls ayant cette propriété.

Exercice 5.45. Soient C_1 et C_2 deux cercles distincts de rayons r_1 et r_2 .

- a) Montrer que C_1 et C_2 se coupent perpendiculairement si et seulement si la distance d entre leurs centres est donnée par

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

- b) Si C_1 et C_2 sont plutôt concentriques, montrer que les seuls cercles généralisés coupant C_1 et C_2 perpendiculairement sont de la forme $C = L \cup \{\infty\}$ avec L une droite passant par leur centre commun.

- c) Inversement, si L_1 et L_2 sont deux droites distinctes se coupant en P , montrer que les seuls cercles généralisés coupant L_1 et L_2 perpendiculairement sont les cercles centrés en P .

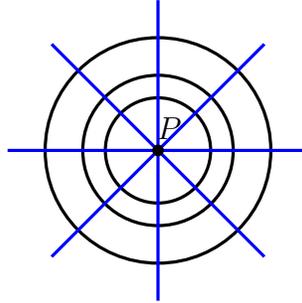


FIGURE 56 – Les faisceaux \mathcal{F}_P^\perp et \mathcal{F}_P en bleu et noir respectivement

Si $t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est une inversion centrée en A envoyant \mathcal{F}_P sur un faisceau de cercles \mathcal{F}_{AB} aux points limites, alors t est telle que $t(\infty) = A$ et $t(P) = B$. Cela montre que t envoie \mathcal{F}_P^\perp sur l'ensemble \mathcal{F}_{AB}^\perp de cercles généralisés passant par A et B .

Définition 5.46. On dit que \mathcal{F}_{AB}^\perp est un **faisceau de cercles à points de base A et B** ayant pour **axe radical** la droite AB .

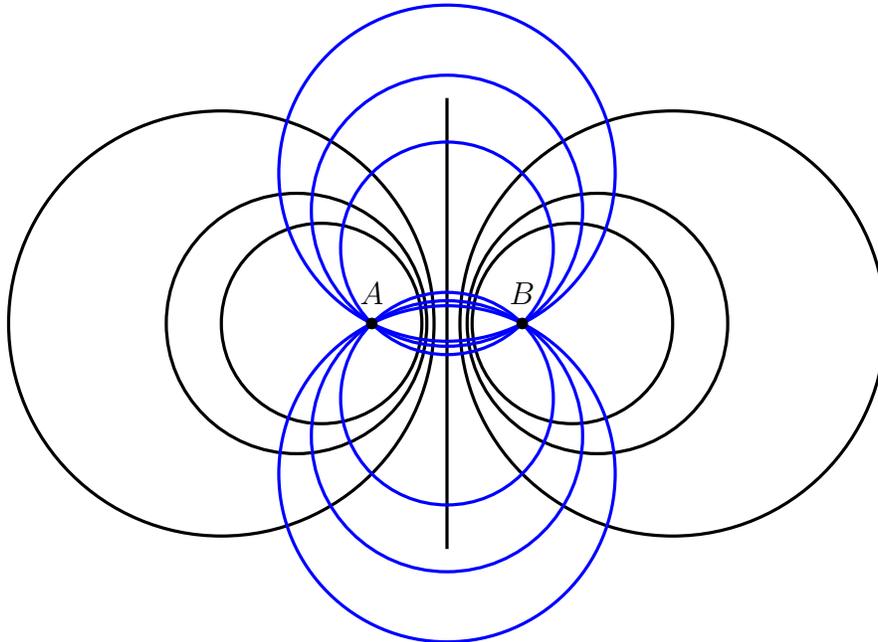


FIGURE 57 – Faisceaux de cercles \mathcal{F}_{AB}^\perp et \mathcal{F}_{AB} en bleu et noir respectivement

Comme la notation \mathcal{F}_{AB}^\perp le suggère, on a le résultat suivant.

Théorème 5.47. Soient A et B des points distincts de \mathbb{C} . Alors chaque cercle généralisé du faisceau \mathcal{F}_{AB}^\perp coupe les cercles généralisés du faisceau \mathcal{F}_{AB} perpendiculairement. Si C est un cercle généralisé coupant perpendiculairement deux cercles généralisés distincts de \mathcal{F}_{AB} , alors $C \in \mathcal{F}_{AB}^\perp$. De même, si C est un cercle généralisé coupant perpendiculairement deux cercles généralisés distincts de \mathcal{F}_{AB}^\perp , alors $C \in \mathcal{F}_{AB}$.

Démonstration. Cela découle du fait que l'inversion t envoyant \mathcal{F}_P et \mathcal{F}_P^\perp sur \mathcal{F}_{AB} et \mathcal{F}_{AB}^\perp est une transformation conforme. De plus, si C est un cercle généralisé coupant deux cercles généralisés distincts $C_1, C_2 \in \mathcal{F}_{AB}$ perpendiculairement, alors $t(C)$ coupe perpendiculairement les cercles distincts $t(C_1), t(C_2) \in \mathcal{F}_P$. Par l'Exercice 5.45, $t(C) \in \mathcal{F}_P^\perp$, donc

$$C = t(t(C)) \in \mathcal{F}_{AB}^\perp.$$

De même, si C coupe perpendiculairement deux cercles généralisés distincts $C_1, C_2 \in \mathcal{F}_{AB}^\perp$, alors $t(C)$ coupe perpendiculairement les cercles généralisés $t(C_1), t(C_2) \in \mathcal{F}_P$. Par l'Exercice 5.45, $t(C) \in \mathcal{F}_P$, donc $C = t(t(C)) \in \mathcal{F}_{AB}$. \square

Cette relation d'orthogonalité entre les faisceaux \mathcal{F}_{AB} et \mathcal{F}_{AB}^\perp peut en fait être utilisée pour caractériser les éléments du faisceau \mathcal{F}_{AB} en termes d'inversions.

Théorème 5.48. Soient C un cercle généralisé et $\widehat{\iota}_C$ l'inversion associée. Alors pour tous points distincts $A, B \in \mathbb{C}$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- a) $C \in \mathcal{F}_{AB}$;
- b) Tout cercle généralisé de \mathcal{F}_{AB}^\perp coupe C perpendiculairement ;
- c) $A = \widehat{\iota}_C(B)$.

Démonstration. Par le Théorème 5.47, les assertions a et b sont équivalentes. Il suffit donc de montrer que les assertions b et c sont équivalentes.

$b \implies c$) Soit $C_1 \in \mathcal{F}_{AB}^\perp$. Alors C_1 coupe C perpendiculairement en deux points distincts, disons Q et P .

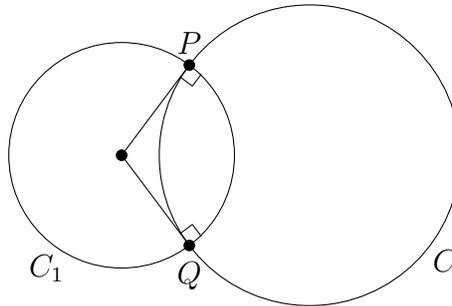


FIGURE 58 – Le cas où C_1 est un cercle

Comme $\widehat{\iota}_C(Q) = Q$ et $\widehat{\iota}_C(P) = P$, $\widehat{\iota}_C(C_1)$ est aussi un cercle généralisé qui coupe C en P et Q perpendiculairement. Si $C_1 = L \cup \{\infty\}$, alors clairement C_1 passe par le centre de C et $\widehat{\iota}_C(C_1) = C_1$. Si C_1 est plutôt un cercle, alors $\widehat{\iota}_C(C_1)$ est aussi un cercle et son centre

est le point où les tangentes à C en P et Q se coupent, donc $\widehat{i}_C(C_1) = C_1$. Cela montre que $\widehat{i}_C(C_1) = C_1$ pour tout $C_1 \in \mathcal{F}_{AB}^\perp$. En particulier,

$$\bigcap_{C_1 \in \mathcal{F}_{AB}^\perp} C_1 = \{A, B\} \implies \widehat{i}_C(\{A, B\}) = \{A, B\},$$

donc en fait $\widehat{i}_C(B) = A$, car autrement on aurait que

$$\widehat{i}_C(A) = A, \widehat{i}_C(B) = B \implies A, B \in C \implies C \in \mathcal{F}_{AB}^\perp,$$

ce qui contredirait notre hypothèse que tout cercle généralisé de \mathcal{F}_{AB}^\perp coupe C perpendiculairement.

$c \implies b$) Supposons maintenant que $A = \widehat{i}_C(B)$. Comme A et B sont distincts, $A \notin C$ et $B \notin C$, donc $C \notin \mathcal{F}_{AB}^\perp$. Soit $C_1 \in \mathcal{F}_{AB}^\perp$. Alors C_1 passe par A et B . Comme l'un de ces points est à l'intérieur du cercle C et l'autre à l'extérieur, on voit que C_1 coupe C en deux points distincts qu'on dénotera P et Q . Par hypothèse, $\widehat{i}_C(C_1)$ est donc aussi un cercle généralisé passant par A, B, P et Q . Par le Corollaire 5.42, on en déduit que $\widehat{i}_C(C_1) = C_1$. Si α et α' sont les angles que forment C et C_1 de part et d'autre de C en P ou en Q , alors, puisque \widehat{i}_C est une transformation conforme, il faut donc que $\alpha = \alpha'$, c'est-à-dire α est un angle droit.

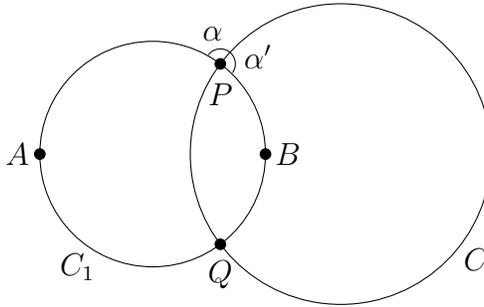


FIGURE 59 – Les angles α et α'

□

Le Théorème 5.48 permet de montrer que les inversions se comportent bien sous l'action d'une transformation inversive.

Corollaire 5.49. *Soient C un cercle généralisé et $A, B \in \widehat{\mathbb{C}}$ des points distincts tels que $\widehat{i}_C(A) = B$ pour l'inversion \widehat{i}_C associée à C . Alors pour toute transformation inversive t , $t(A)$ est l'inverse de $t(B)$ par rapport au cercle généralisé $t(C)$.*

Démonstration. Par le Théorème 5.48, chaque cercle généralisé du faisceau \mathcal{F}_{AB}^\perp est perpendiculaire à C , où on utilise la convention que $\mathcal{F}_{P\infty}^\perp := \mathcal{F}_P^\perp$ et $\mathcal{F}_{\infty P}^\perp := \mathcal{F}_P^\perp$ si A ou B correspond au point à l'infini. Clairement, t envoie \mathcal{F}_{AB}^\perp sur $\mathcal{F}_{t(A)t(B)}^\perp$. Comme t est une transformation conforme, on voit que chaque membre de \mathcal{F}_{AB}^\perp coupe $t(C)$ perpendiculairement. Par le Théorème 5.48, $t(A)$ est donc l'inverse de $t(B)$ par rapport au cercle généralisé $t(C)$ si $t(A), t(B) \in \mathbb{C}$. Si plutôt $t(A)$ ou $t(B)$ correspond au point à l'infini, alors l'autre point correspond au centre de $t(C)$, donc à nouveau $t(A)$ est l'inverse de $t(B)$ par rapport au cercle $t(C)$. □

Corollaire 5.50. Soient $A, B \in \widehat{\mathbb{C}}$ des points distincts et \mathcal{F} l'ensemble des cercles généralisés tels que $\widehat{i}_C(A) = B$. Si $A, B \in \mathbb{C}$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{AB}$. Si plutôt A ou B est le point à l'infini, alors \mathcal{F} est le faisceau de cercles concentriques centrés en A ou B .

Démonstration. Si A ou B est le point à l'infini, alors \mathcal{F} correspond clairement aux cercles de centre A ou B , car pour $C \in \mathcal{F}$, $\widehat{i}_C(\infty)$ est le centre de C . Si plutôt $A, B \in \mathbb{C}$, soit t une inversion de centre A avec $Q := t(B)$. Par le Corollaire 5.49, $t(\mathcal{F})$ est la famille de cercles C tels que $\widehat{i}_C(Q) = \infty$. Par la discussion qui précède, $t(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_Q$, donc $\mathcal{F} = t(\mathcal{F}_Q) = \mathcal{F}_{AB}$. \square

Ce corollaire suggère d'utiliser les notations $\mathcal{F}_{P\infty} := \mathcal{F}_P$ et $\mathcal{F}_{\infty P} : \mathcal{F}_P$ pour $P \in \mathbb{C}$. On déduit du Corollaire 5.49 et du Corollaire 5.50 que les faisceaux de cercles aux points limites se comportent bien sous l'action d'une transformation inversive.

Corollaire 5.51. Pour $A, B \in \widehat{\mathbb{C}}$ des points distincts, soit \mathcal{F}_{AB} le faisceau de cercles associé. Alors toute transformation inversive $t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ envoie \mathcal{F}_{AB} sur $\mathcal{F}_{t(A)t(B)}$.

On peut utiliser ces résultats pour associer à deux cercles disjoints un unique faisceau de cercles aux points limites. Pour ce faire, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.52. Soient C_1 et C_2 deux cercles disjoints de \mathbb{C} . Alors il existe une transformation inversive envoyant C_1 et C_2 sur deux cercles concentriques.

Démonstration. Soit $t_1 : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une inversion par rapport à un point $Q \in C_1$. Alors t_1 envoie C_1 sur $C'_1 = L'_1 \cup \{\infty\}$ et C_2 sur un cercle C'_2 . Soit L'_3 une droite passant par le centre de C'_2 et coupant L'_1 perpendiculairement. Soit $C'_3 = L'_3 \cup \{\infty\}$ le cercle généralisé correspondant. Soit aussi $T \in C'_2$ tel que la tangente L_T de C'_2 en T coupe L'_1 perpendiculairement, disons en P . Soit C'_4 le cercle de centre P et de rayon \overline{PT} .

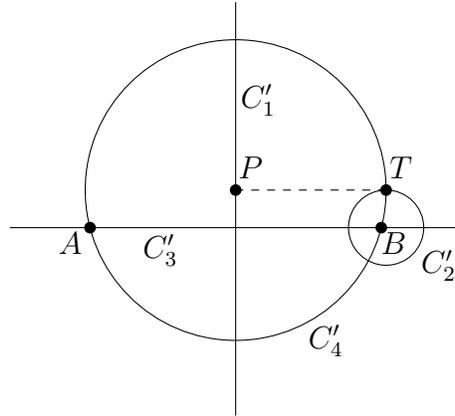


FIGURE 60 – Les cercles généralisés C'_1, C'_2, C'_3 et C'_4

Comme C'_2 et C'_1 sont disjoints, remarquons que si r est le rayon de C'_2 , alors $\overline{PT} > r$ et la distance entre P et L'_3 est r . On en déduit que C'_4 et L'_3 se coupe en deux points, disons A et B . Soit $t_2 : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une inversion par rapport au point A . Alors t_2 envoie C'_3 sur lui-même et C'_4 sur un cercle généralisé $L''_4 \cup \{\infty\}$, où L''_4 est une droite coupant L'_3 en $t_2(B) \in \mathbb{C}$. Comme $t_2(C'_1)$ et $t_2(C'_2)$ coupent L'_3 et L''_4 perpendiculairement, ce sont par l'Exercice 5.45 des cercles de centre $t_2(B)$, de sorte que $t := t_2 \circ t_1$ envoie C_1 et C_2 sur deux cercles concentriques. \square

Théorème 5.53. Soient C_1 et C_2 deux cercles disjoints de \mathbb{C} qui ne sont pas concentriques. Alors il existe un unique faisceau de cercles aux points limites \mathcal{F}_{AB} contenant C_1 et C_2 .

Démonstration. Soit $t : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la transformation inversive du Lemme 5.52 envoyant C_1 et C_2 sur deux cercles concentriques. Si Q est le centre de ces cercles, posons $\mathcal{F}_{AB} := t^{-1}(\mathcal{F}_Q)$ avec $A = t^{-1}(Q)$ et $B = t^{-1}(\infty)$, de sorte que \mathcal{F}_{AB} est bien un faisceau de cercles aux points limites contenant les cercles C_1 et C_2 . Comme on suppose que C_1 et C_2 ne sont pas concentriques, remarquons que $A, B \in \mathbb{C}$.

Pour montrer que \mathcal{F}_{AB} est unique, soit $\mathcal{F}_{A'B'}$ un autre faisceau de cercles aux points limites tels que $C_1, C_2 \in \mathcal{F}_{A'B'}$. Dans ce cas, $t(\mathcal{F}_{A'B'}) = \mathcal{F}_{t(A')t(B')}$ par le Corollaire 5.51. Comme $t(C_1)$ et $t(C_2)$ sont concentriques et font parti de ce faisceau, on voit par l'Exercice 5.45 que $\mathcal{F}_{t(A')t(B')}$ correspond aux cercles généralisés de la forme $L \cup \{\infty\}$ avec L une droite passant par le centre de ces cercles. Il faut en fait que $\mathcal{F}_{t(A')t(B')}^\perp = \mathcal{F}_Q^\perp$ et $\mathcal{F}_{t(A')t(B')} = \mathcal{F}_Q$, donc

$$\mathcal{F}_{A'B'} = t^{-1}(\mathcal{F}_{t(A')t(B')}) = t^{-1}(\mathcal{F}_Q) = \mathcal{F}_{AB}.$$

□

5.6 Problèmes

Problème 5.1. Déterminer l'image des droites suivantes sous l'inversion \widehat{i}_E de l'Exercice 5.5 :

- La droite d'équation $y + 3x = 5$;
- La droite d'équation $y + 2x = 0$.

Problème 5.2. L'application antipodale $\mathcal{P} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ est donnée par $\mathcal{P}(\vec{u}) = -\vec{u}$.

- Montrer que

$$p_N \circ \mathcal{P} \circ p_N^{-1}(x, y) = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

- En termes de $z = x + iy$, montrer que $p_N \circ \mathcal{P} \circ p_N^{-1}(z) = -1/\bar{z}$.

Problème 5.3. Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles généralisés dans $\widehat{\mathbb{C}}$. Montrer qu'il existe une transformation inversive envoyant \mathcal{C}_1 sur \mathcal{C}_2 . Est-ce qu'une telle transformation inversive est unique ?

Problème 5.4. Soit \mathcal{C} un cercle de centre P dans le plan complexe. Montrer que les seuls cercles généralisés passant par P et coupant \mathcal{C} perpendiculairement sont de la forme $\mathcal{C}' = L \cup \{\infty\}$ avec L une droite passant par P . Indice : Considérer $t_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$.

Problème 5.5. Sur la sphère \mathbb{S}^2 de rayon 1 centrée à l'origine dans \mathbb{R}^3 , montrer que les seuls cercles passant par le pôle Sud $S = (0, 0, -1)$ et perpendiculaires à l'équateur $E := \mathbb{S}^2 \cap \Pi_{z=0}$ sont les méridiens, c'est-à-dire les grands cercles passant par le pôle Nord $N = (0, 0, 1)$ et le pôle Sud.

Problème 5.6. Si $\mathbb{A} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$, montrer que $M_{\lambda\mathbb{A}} = M_{\mathbb{A}}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Problème 5.7. Soit $M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ la transformation de Möbius donnée par $M(z) = \frac{z+i}{z-i}$.
Quelle est l'image par M du cercle $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$?

Problème 5.8. Déterminer si les quatre points $0, 6, -3i$ et $2 - 2i$ du plan complexe sont contenus dans un cercle généralisé commun.

Problème 5.9. Une droite complexe L de \mathbb{C}^2 passant par l'origine est un ensemble de la forme

$$L = \{(\lambda a_0, \lambda a_1) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

pour un certain $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On utilise dans ce cas la notation $L = [a_0 : a_1]$ avec la convention que $[a_0 : a_1] = [\lambda a_0 : \lambda a_1]$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La **droite projective complexe**, dénotée par \mathbb{CP}^1 , est par définition l'ensemble des droites complexes de \mathbb{C}^2 passant par l'origine. Une **transformation projective** de \mathbb{CP}^1 est une bijection

$$t : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

donnée par $t([z_0 : z_1]) = [a_{00}z_0 + a_{01}z_1 : a_{10}z_0 + a_{11}z_1]$ pour une matrice inversible $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$.

- Montrer que les transformations projectives de \mathbb{CP}^1 forment une groupe avec opération interne donnée par la composition. On dénote ce groupe par $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$.
- Montrer que l'application $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{CP}^1$, définie par $\varphi(z) = [z : 1]$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $\varphi(\infty) = [1 : 0]$, est une bijection.
- Montrer que l'application φ induit un isomorphisme de groupes

$$\Phi : \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C})$$

donné par $\Phi(M) = \varphi \circ M \circ \varphi^{-1}$.

Problème 5.10. (théorème de Ptolémée²) Si $ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle, alors

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Indice : Considérer l'inversion par rapport au cercle de rayon 1 et de centre A et utiliser l'Exercice 5.12.

Problème 5.11. On suppose que $P = \vec{0}$ est l'origine de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. En termes de la projection stéréographique $p_N : \mathbb{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, montrer que :

- $p_N^{-1}(\mathcal{F}_P)$ correspond à l'ensemble des latitudes de \mathbb{S}^2 , c'est-à-dire aux cercles de la forme $\mathbb{S}^2 \cap \Pi_{z=k}$ pour $k \in (-1, 1)$;
- $p_N^{-1}(\mathcal{F}_P^\perp)$ correspond à l'ensemble des méridiens, c'est-à-dire aux grands cercles passant par le pôle Nord et le pôle Sud.

2. d'Alexandrie !

Problème 5.12. Montrer qu'une transformation de Möbius $M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ donnée par $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ envoie le cercle généralisé associé à la droite d'équation $y = 0$ sur lui-même si et seulement si $M = M_{\mathbb{A}}$ avec $\mathbb{A} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que les coefficients a, b, c et d peuvent être choisis de sorte qu'ils soient tous réels.

Problème 5.13. Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles généralisés disjoints. Montrer qu'il existe deux points distincts $A, B \in \hat{\mathbb{C}}$ tels que tout cercle généralisé coupant \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 perpendiculairement passe par A et B , c'est-à-dire appartient à \mathcal{F}_{AB}^{\perp} (avec la convention que $\mathcal{F}_{A\infty}^{\perp} = \mathcal{F}_{\infty A}^{\perp} = \mathcal{F}_A^{\perp}$ correspond aux cercles généralisés passant par A et le point ∞ lorsque $B = \infty$).

Problème 5.14. (Alternative de Steiner) : Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles qui ne se coupent pas tels que \mathcal{C}_1 est à l'intérieur de \mathcal{C}_2 . Montrer que soit il n'existe de pas de chaîne de cercles entre \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de sorte que chaque cercle de la chaîne soit tangent à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 et à deux autres cercles de la chaîne, soit une telle chaîne existe et le premier cercle de la chaîne peut-être choisi tangent à \mathcal{C}_1 en un point quelconque de \mathcal{C}_1 .

Problème 5.15. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 trois cercles dans le plan \mathbb{R}^2 qui sont chacun tangent aux deux autres en des points distincts.

- Montrer qu'il existe une inversion du plan complexe étendu $\hat{\mathbb{C}}$ envoyant \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sur des cercles généralisés de la forme $L_1 \cup \{\infty\}$ et $L_2 \cup \{\infty\}$ avec L_1 et L_2 des droites parallèles.
- Montrer qu'il existe exactement deux cercles généralisés qui sont chacun tangent aux trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 .
- Montrer par un exemple que ces deux cercles généralisés chacun tangent aux trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 ne sont pas forcément des cercles.

Problème 5.16. Pour chacune des paires d'objets géométriques suivantes, déterminer s'il existe une application conforme (c'est-à-dire qui préserve les angles) identifiant le premier objet avec le second :

- Un triangle euclidien et un triangle sphérique ;
- Le demi-plan $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ et la demi-sphère

$$\mathbb{S}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}.$$

Problème 5.17. Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 des cercles disjoints du plan \mathbb{R}^2 .

- Si \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont concentriques, montrer qu'il existe une inversion envoyant \mathcal{C}_1 sur \mathcal{C}_2 et vice versa.
- Si \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ne sont pas concentriques, montrer qu'une telle inversion existe toujours.

Problème 5.18. Soit C un cercle de rayon r et de centre O . La **puissance** d'un point A par rapport au cercle C est le nombre réel

$$P_C(A) := \overline{AO}^2 - r^2.$$

- Montrer que $P_C(A) = 0$ si et seulement si $A \in C$ et que $P_C(A) > 0$ si et seulement si A est à l'extérieur du cercle.

b) Si C et C' sont deux cercles ayant des centres distincts, montrer que l'ensemble

$$\{Q \in \mathbb{R}^2 \mid P_C(Q) = P_{C'}(Q)\}$$

est une droite. C'est **l'axe radical** des cercles C et C' .

Problème 5.19. Soient A et B des points distincts de \mathbb{R}^2 .

- a) Montrer que l'axe radical de deux cercles distincts du faisceau \mathcal{F}_{AB}^\perp correspond bien à la droite AB .
- b) Montrer que l'axe radical de deux cercles distincts du faisceau \mathcal{F}_{AB} correspond bien à la médiatrice du segment AB . *Indice : On peut appliquer une isométrie pour se ramener au cas où $A = (-a, 0)$ et $B = (a, 0)$ pour un certain $a > 0$.*

6 Géométrie hyperbolique



La géométrie hyperbolique est un exemple de géométrie où les quatre premiers postulats d'Euclide sont valides, mais où le cinquième postulat est remplacé par : *pour L une droite dans le plan et P un point qui n'est pas sur L , il existe au moins deux droites passant par P qui ne coupent pas L .*

6.1 Le modèle du disque

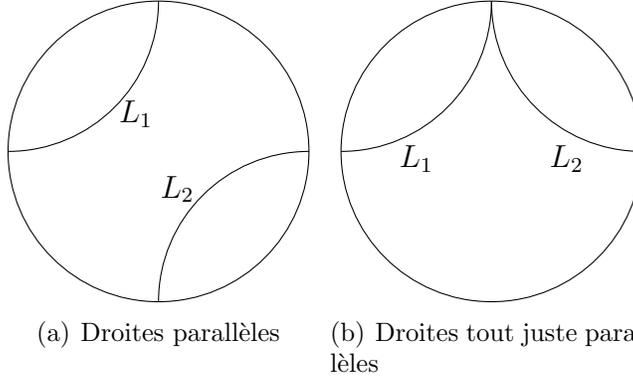
Les **points du plan hyperbolique** sont les points du disque de rayon 1 et de centre l'origine :

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}. \quad (6.1)$$

Le bord $\partial\mathcal{D}$ du disque \mathcal{D} est alors le cercle unité centré à l'origine. Une **droite du plan hyperbolique** est un sous-ensemble de la forme $L = C \cap \mathcal{D}$ avec C un cercle généralisé coupant $\partial\mathcal{D}$ perpendiculairement.

Exemple 6.1. Les diamètres du cercle $\partial\mathcal{D}$ sont des droites hyperboliques.

Définition 6.2. Des droites hyperboliques L_1 et L_2 sont **parallèles** si elles ne se coupent pas. Elles sont **tout juste parallèles** si elles sont parallèles et les cercles généralisés C_1 et C_2 tels que $L_1 = C_1 \cap \mathcal{D}$ et $L_2 = C_2 \cap \mathcal{D}$ se coupent en un point de $\partial\mathcal{D}$.



Théorème 6.3. Soit L une droite hyperbolique et C le cercle généralisé tel que $L = C \cap \mathcal{D}$. Alors l'inversion $\widehat{i}_C : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ associée à C envoie \mathcal{D} sur \mathcal{D} et $\partial\mathcal{D}$ sur $\partial\mathcal{D}$.

Démonstration. Par hypothèse, $\partial\mathcal{D}$ coupe C perpendiculairement, disons en P et Q . Si C est l'union d'une droite et du point à l'infini, alors \widehat{i}_C est une réflexion par rapport à une droite passant par le centre de \mathcal{D} , donc $\widehat{i}(\partial\mathcal{D}) = \partial\mathcal{D}$ et $\widehat{i}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Si C est plutôt un cercle, alors $\widehat{i}_C(\partial\mathcal{D})$ est aussi un cercle coupant $\partial\mathcal{D}$ perpendiculairement en P et Q . Tout comme $\partial\mathcal{D}$, son centre est donc le point où les tangentes à C en P et Q se coupent, c'est-à-dire que $\widehat{i}_C(\partial\mathcal{D}) = \partial\mathcal{D}$. Dans ce cas, $\widehat{i}_C(\mathcal{D})$ correspond à \mathcal{D} ou à $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{D}}$ avec $\overline{\mathcal{D}} := \partial\mathcal{D} \cup \mathcal{D}$. Or, comme $\widehat{i}_C|_C = \text{Id}$ et que $L = C \cap \mathcal{D}$, on a que $\widehat{i}_C(L) = L$, donc $\widehat{i}_C(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. \square

Définition 6.4. La **réflexion hyperbolique** par rapport à une droite hyperbolique L est la restriction à \mathcal{D} de l'inversion \widehat{i}_C associée au cercle généralisé C tel que $L = \mathcal{D} \cap C$.

Comme les inversions sont des transformations conformes et qu'elles envoient un cercle généralisé sur un cercle généralisé, on voit par le Théorème 6.3 qu'une réflexion hyperbolique envoie une droite hyperbolique sur une droite hyperbolique.

Définition 6.5. Une **transformation hyperbolique** $t : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ est une bijection donnée par la composition d'un nombre fini de réflexions hyperboliques. On dénote par $G_{\mathcal{D}}$ l'ensemble des transformations hyperboliques.

Proposition 6.6. L'ensemble $G_{\mathcal{D}}$ muni de l'opération de composition est un groupe.

Démonstration. Clairement, la composition de deux transformations hyperboliques est à nouveau la composition d'un nombre fini de réflexions hyperboliques, donc est une transformation hyperbolique. Comme une réflexion hyperbolique est son propre inverse, l'identité est de la forme r^2 avec r une réflexion hyperbolique, donc est une transformation hyperbolique. De même, si $r_1 \circ \dots \circ r_k$ est la composition de k réflexions hyperboliques, alors son inverse $r_k \circ \dots \circ r_1$ est aussi la composition d'un nombre fini de réflexions hyperboliques. Par le Lemme 1.23, l'ensemble $G_{\mathcal{D}}$ est bien un groupe. \square

Comme pour la géométrie affine, on partira de l'hypothèse que $G_{\mathcal{D}}$ constitue le groupe des symétries du plan hyperbolique pour déterminer les structures géométriques associées à la géométrie hyperbolique.

Définition 6.7. L'angle (hyperbolique) entre deux courbes se coupant dans le plan hyperbolique \mathcal{D} est l'angle qu'elles forment en tant que courbes de \mathbb{R}^2 .

Proposition 6.8. *Les transformations de $G_{\mathcal{D}}$ préservent les angles.*

Démonstration. Comme une transformation $t \in G_{\mathcal{D}}$ est la restriction d'une transformation inversive, elle préserve automatiquement les angles par la Proposition 5.19. \square

Lemme 6.9 (de l'origine). *Soit $A \in \mathcal{D} \setminus \{\vec{0}\}$. Alors il existe une unique droite hyperbolique L telle que la réflexion hyperbolique r_L associée envoie A sur l'origine.*

Démonstration. Dénotons l'origine $\vec{0}$ par O . Clairement, une réflexion hyperbolique pourra possiblement envoyer A sur O seulement si elle correspond à une inversion par rapport à un cercle ayant son centre sur la droite OA . Pour que ce cercle coupe $\partial\mathcal{D}$ perpendiculairement, il faut aussi que son centre soit à l'extérieur de $\partial\mathcal{D}$ et du même côté de O que A . Soit donc R un point sur la droite OA à l'extérieur de \mathcal{D} et du même côté de O que A . Soit C le cercle de centre R et de rayon r . Par l'Exercice 5.45, le cercle C coupera $\partial\mathcal{D}$ perpendiculairement,

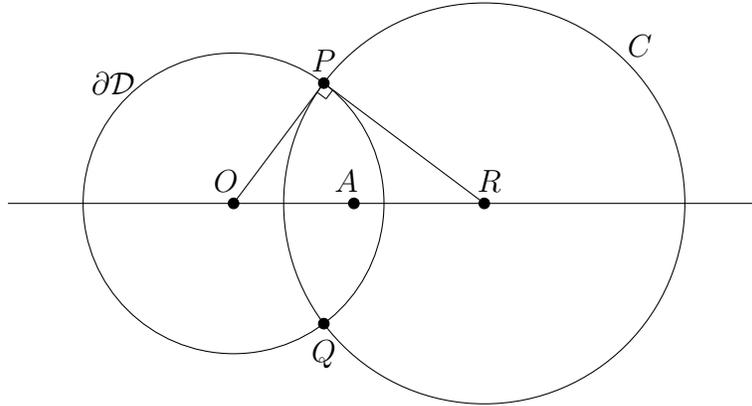


FIGURE 61 – Preuve du Lemme 6.9 : Le cercle C centré en R

disons en P et Q , si et seulement si $r = \sqrt{\overline{OR}^2 - 1}$. Dans ce cas, notons alors que $L := C \cap \mathcal{D}$ est une droite hyperbolique.

Pour que l'inversion $\widehat{i}_C : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ envoie A sur O , il faut que

$$\begin{aligned} \overline{AR} \cdot \overline{OR} = r^2 = \overline{OR}^2 - 1 &\iff (\overline{OR} - \overline{OA}) \cdot \overline{OR} = \overline{OR}^2 - 1, \quad \text{car } \overline{AR} = \overline{OR} - \overline{OA}, \\ &\iff \overline{OA} \cdot \overline{OR} = 1 \\ &\iff R = \widehat{i}_{\partial\mathcal{D}}(A). \end{aligned}$$

L'unique réflexion hyperbolique envoyant A sur O est donc celle associée au cercle de centre $\widehat{i}_{\partial\mathcal{D}}(A)$ et de rayon

$$r = \sqrt{\widehat{O\widehat{i}_{\partial\mathcal{D}}(A)}^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\overline{OA}^2} - 1}.$$

\square

Théorème 6.10. Soit $A \in \mathcal{D} \setminus \{\vec{0}\}$. Alors il existe une infinité de droites hyperboliques passant par A .

Démonstration. Soit $r : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ une réflexion hyperbolique envoyant A sur l'origine $\vec{0}$. Alors $r(L)$ est une droite hyperbolique passant par A pour chaque diamètre L passant par l'origine, donc il y a une infinité de droites hyperboliques passant par A , d'où le résultat. \square

Corollaire 6.11. Si A et B sont deux points distincts de \mathcal{D} , alors il existe une unique droite hyperbolique passant par A et B .

Démonstration. Quitte à appliquer une réflexion hyperbolique, on peut se ramener au cas où $A = \vec{0}$. Soit L la droite dans \mathbb{R}^2 passant par $\vec{0}$ et B . Par le Problème 5.4, tout autre droite hyperbolique passant par $\vec{0}$ est de la forme $L' \cap \mathcal{D}$ avec L' une droite de \mathbb{R}^2 passant par $\vec{0}$. Comme on a une seule droite dans \mathbb{R}^2 passant par $\vec{0}$ et B , on aura donc que $L \cap \mathcal{D}$ est l'unique droite hyperbolique passant par $\vec{0}$ et B . \square

En restreignant le Corollaire 5.49 au cadre hyperbolique, on obtient le résultat suivant.

Théorème 6.12. Soient A et B des points distincts de \mathcal{D} tels que $B = r_L(A)$, où r_L est la réflexion hyperbolique par rapport à une droite hyperbolique L . Si L^* est une autre droite hyperbolique envoyant A sur A' , B sur B' et L sur L' , alors

$$B' = r_{L'}(A').$$

6.2 La notion de distance en géométrie hyperbolique

Comme en géométrie euclidienne et en géométrie sphérique, on a une notion de distance en géométrie hyperbolique. Tirées du cours Analyse III (MAT3150), voici quelques propriétés de base qu'une telle notion de distance devrait satisfaire.

Définition 6.13 (Analyse III). Une **métrique** (ou fonction de la distance entre deux points) sur \mathcal{D} est une fonction $d : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty)$ telle que :

1. $d_h(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$ (séparation) ;
2. $d_h(z_1, z_2) = d_h(z_2, z_1) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ (symétrie) ;
3. $d_h(z_1, z_3) \leq d_h(z_1, z_2) + d_h(z_2, z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{D}$ (inégalité du triangle).

Au final, on souhaite que cette notion de distance soit telle que le groupe de transformations $G_{\mathcal{D}}$ correspondent aux isométries par rapport à cette distance. Pour cette raison, on imposera aussi les deux propriétés supplémentaires suivantes :

4. $d_h(z_1, z_3) = d_h(z_1, z_2) + d_h(z_2, z_3) \iff z_2$ est entre z_1 et z_3 sur l'unique droite hyperbolique les joignant ;
5. $d_h(Mz_1, Mz_2) = d_h(z_1, z_2) \quad \forall M \in G_{\mathcal{D}}, \forall z_1, z_2 \in \mathcal{D}$.

Cette quatrième condition nous assure que d se comportera bien par rapport à la notion de droite hyperbolique, alors que la cinquième condition demande à ce que les éléments de $G_{\mathcal{D}}$ soient des isométries par rapport à \mathcal{D} . Avant d'établir l'existence d'une telle métrique d , dérivons certaines de ces propriétés.

Lemme 6.14. *Si une telle métrique existe, alors $d_h(0, z) = d_h(0, |z|)$ ne dépend que de $|z|$ pour tout $z \in \mathcal{D}$.*

Démonstration. Comme une rotation autour de l'origine dans \mathbb{R}^2 est la composition de deux réflexions par rapport à des droites passant par l'origine, sa restriction à \mathcal{D} est un élément de $G_{\mathcal{D}}$, ce qu'on appelle en fait une **rotation hyperbolique**. Par la propriété 5 ci-haut, la distance $d_h(0, z)$ reste inchangée lorsqu'on effectue une rotation autour de l'origine. Il faut donc que

$$d_h(0, z) = d_h(0, |z|) \quad \forall z \in \mathcal{D}.$$

□

Lemme 6.15. *Pour $z_0 \in D \setminus \{0\}$, la réflexion hyperbolique du Lemme 6.9 envoyant z_0 sur 0 est donnée par*

$$r_L(z) = \frac{\bar{\alpha}z - 1}{\bar{z} - \alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha := \frac{1}{z_0}.$$

Démonstration. Par le Lemme 6.9, la réflexion hyperbolique r_L est induite par l'inversion par rapport au cercle de centre $R = \widehat{i}_{\partial D}(z_0) = \frac{1}{z_0}$ et de rayon

$$r = \sqrt{\frac{1}{|z_0|^2} - 1}.$$

Ainsi, si $t(z) = z + \frac{1}{z_0}$ est la translation envoyant 0 sur $\frac{1}{z_0}$ et $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est la multiplication par r , on aura que

$$\begin{aligned} r_L(z) &= t \circ r \circ \widehat{i}_{\partial D} \circ r^{-1} \circ t^{-1}(z) = \frac{r^2}{\left(z - \frac{1}{z_0}\right)} + \frac{1}{z_0} = \frac{\frac{1}{|z_0|^2} - 1}{\bar{z} - \frac{1}{z_0}} + \frac{1}{z_0} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{|z_0|^2} - 1\right) \bar{z}_0 + \bar{z} - \frac{1}{z_0}}{\left(\bar{z} - \frac{1}{z_0}\right) \bar{z}_0} = \frac{\frac{1}{z_0} - \bar{z}_0 + \bar{z} - \frac{1}{z_0}}{\bar{z} \bar{z}_0 - \frac{\bar{z}_0}{z_0}} \\ &= \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{\bar{z} \bar{z}_0 - \frac{\bar{z}_0}{z_0}} = \frac{\left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}_0}\right) - 1}{\bar{z} - \frac{1}{z_0}}. \end{aligned}$$

□

En combinant les Lemmes 6.14 et 6.15, on obtient le résultat suivant.

Proposition 6.16. *Pour tous $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$,*

$$d_h(z_1, z_2) = d\left(0, \left| \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_1 z_2 - 1} \right| \right).$$

Démonstration. Soit $r_L(z) = \frac{\bar{\alpha}z-1}{\bar{z}-\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{z_1}$ la réflexion hyperbolique envoyant z_1 sur 0. Par le Lemme 6.14 et la propriété 5 que la métrique d devrait satisfaire, on a donc que

$$d_h(z_1, z_2) = d_h(r_L(z_1), r_L(z_2)) = d\left(0, \frac{\bar{\alpha}z_2 - 1}{\bar{z}_2 - \alpha}\right) = d\left(0, \left|\frac{\bar{\alpha}z_2 - 1}{\bar{z}_2 - \alpha}\right|\right).$$

Or, comme $|z| = |\bar{z}|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on calcule que

$$\left|\frac{\bar{\alpha}z_2 - 1}{\bar{z}_2 - \alpha}\right| = \frac{|\bar{z}_1|}{|z_1|} \left|\frac{\bar{\alpha}z_2 - 1}{\bar{z}_2 - \alpha}\right| = \left|\frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_1\bar{z}_2 - 1}\right| = \left|\frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_1 z_2 - 1}\right|,$$

d'où le résultat. □

En faisant une hypothèse naturelle de régularité sur la métrique d , on peut maintenant la déterminer assez simplement en termes de la version hyperbolique de la fonction arctan.

Exercice 6.17. On considère les fonctions

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Établir les identités suivantes pour $x, y \in \mathbb{R}$:

- a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
- b) $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$;
- c) $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$;
- d) $\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$;
- e) $\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$, où $\operatorname{arctanh}$ est l'inverse de la fonction \tanh ;
- f) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$;
- g) $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$;
- h) $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$.

Lemme 6.18. Si $f(x) := d_h(0, x)$ est différentiable pour $x \in [0, 1)$, alors $f(x) = c \operatorname{arctanh}(x)$ pour une constante positive c .

Démonstration. Par la propriété 4 de la métrique d , pour $x \in [0, 1)$ et $h \in \mathbb{R}$ avec $h > 0$ assez petit, on a que

$$d_h(0, x+h) = d_h(0, x) + d_h(x, x+h) \implies f(x+h) - f(x) = d_h(x, x+h).$$

Or, par la Proposition 6.16,

$$d_h(x, x+h) = f\left(\left|\frac{x+h-x}{x(x+h)-1}\right|\right) = f\left(\frac{|h|}{|x(x+h)-1|}\right).$$

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \left(\frac{1}{h}\right) f\left(\left|\frac{x+h-x}{x(x+h)-1}\right|\right) = \left(\frac{1}{h}\right) f\left(\frac{|h|}{|x(x+h)-1|}\right) \\ &= \frac{1}{h} \left(f\left(\frac{|h|}{|x(x+h)-1|}\right) - f(0)\right), \quad \text{car } f(0) = 0. \end{aligned}$$

En prenant la limite $h \rightarrow 0$ avec $h > 0$, on a donc que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (f \circ g(h) - f \circ g(0)) \quad \text{avec } g(h) := \frac{-h}{x(x+h)-1}, \\ &= (f \circ g)'(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(0)g'(0). \end{aligned}$$

Or, on calcule que

$$g'(h) = \frac{-1}{x(x+h)-1} + \frac{hx}{(x(x+h)-1)^2} \implies g'(0) = \frac{-1}{x^2-1} \implies f'(x) = \frac{f'(0)}{1-x^2}.$$

Finalement, en intégrant cette équation, on a donc que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(u) du \quad \text{car } f(0) = 0, \\ &= f'(0) \int_0^x \frac{du}{1-u^2} = f'(0) \operatorname{arctanh}(u)|_{u=0}^{u=x}, \quad \text{car } \frac{d}{du} \operatorname{arctanh}(u) = \frac{1}{1-u^2}, \\ &= f'(0) \operatorname{arctanh}(x), \quad \text{car } \operatorname{arctanh}(0) = 0. \end{aligned}$$

□

À une constante multiplicative c près, on a réussi à déterminer la distance d . C'est le mieux qu'on puisse faire, puisque si d est une métrique satisfaisant aux 5 propriétés qu'on a demandées, alors cd sera aussi une telle métrique pour tout $c > 0$. En géométrie sphérique, on avait en principe un choix similaire à faire, choix qu'on a fait en demandant que la sphère \mathbb{S}^2 soit de rayon 1. Une tel choix a donné lieu à une formule assez simple pour la somme des angles intérieurs d'un triangle sphérique. Comme on le verra, il y a un analogue hyperbolique de cette formule. Pour que cette formule soit aussi simple que possible, le choix naturel pour la constante c est de prendre $c = 2$, ce qui donne la définition suivante³.

Définition 6.19. La **distance hyperbolique** entre deux points z_1 et z_2 de \mathcal{D} est donnée par

$$d_h(z_1, z_2) = 2 \operatorname{arctanh} \left(\left| \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_1 z_2 - 1} \right| \right).$$

Remarque 6.20. En choisissant $c = 2$, on s'assure aussi que la courbure de Gauss, une notion introduite dans le cours de géométrie différentielle (MAT3560), est de -1 .

3. Dans [eJG12], on prend plutôt $c = 1$.

Nous allons maintenant vérifier que cette définition de la distance hyperbolique satisfait bien aux cinq propriétés qu'on s'était données.

Théorème 6.21. *La distance hyperbolique satisfait aux propriétés 1 et 2 de la Définition 6.13.*

Démonstration. Pour la propriété 1, on a que

$$d_h(z_1, z_2) = 0 \iff \left| \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_1 z_2 - 1} \right| = 0 \iff |z_2 - z_1| = 0 \iff z_1 = z_2.$$

De même, pour la propriété 2, comme $|z| = |\bar{z}| = |-z|$, on a bien que

$$d_h(z_1, z_2) = 2 \operatorname{arctanh} \left(\left| \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_1 z_2 - 1} \right| \right) = 2 \operatorname{arctanh} \left(\left| \frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_2 z_1 - 1} \right| \right) = d_h(z_2, z_1) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{D}.$$

□

Théorème 6.22. *Pour toute transformation hyperbolique $M \in G_{\mathcal{D}}$,*

$$d_h(Mz_1, Mz_2) = d_h(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{D},$$

c'est-à-dire que la propriété 5 est satisfaite.

Démonstration. Comme les réflexions hyperboliques engendrent $G_{\mathcal{D}}$, il suffit de montrer que

$$d_h(r_L(z_1), r_L(z_2)) = d_h(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{D}$$

pour r_L une réflexion hyperbolique. D'abord, $d_h(z_1, z_2)$ est clairement invariante sous l'action d'une rotation autour de l'origine par un angle θ :

$$d_h(e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2) = d_h(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{D}.$$

De même, d est invariante sous l'action de la réflexion $z \rightarrow \bar{z}$, donc d est invariante sous toute réflexion par rapport à une droite passant par l'origine. Par le Lemme 6.15, les autres réflexions hyperboliques sont de la forme

$$r_L(z) = \frac{\bar{\alpha}z - 1}{\bar{z} - \alpha}$$

avec $\frac{1}{\alpha}$ le centre du cercle associé à L . On calcule donc que

$$\begin{aligned} \left| \frac{r_L(z_2) - r_L(z_1)}{r_L(z_1)r_L(z_2) - 1} \right| &= \left| \frac{\frac{\bar{\alpha}z_2 - 1}{\bar{z}_2 - \alpha} - \frac{\bar{\alpha}z_1 - 1}{\bar{z}_1 - \alpha}}{\left(\frac{\bar{\alpha}z_1 - 1}{\bar{z}_1 - \alpha}\right)\left(\frac{\bar{\alpha}z_2 - 1}{\bar{z}_2 - \alpha}\right) - 1} \right| = \left| \frac{\frac{\bar{\alpha}z_2 - 1}{\bar{z}_2 - \alpha} - \frac{\bar{\alpha}z_1 - 1}{\bar{z}_1 - \alpha}}{\left(\frac{\alpha z_1 - 1}{z_1 - \bar{\alpha}}\right)\left(\frac{\alpha z_2 - 1}{z_2 - \bar{\alpha}}\right) - 1} \right| \cdot \frac{|(\bar{z}_2 - \alpha)(\bar{z}_1 - \alpha)|}{|(z_1 - \bar{\alpha})(z_2 - \bar{\alpha})|} \\ &= \left| \frac{(\bar{\alpha}z_2 - 1)(\bar{z}_1 - \alpha) - (\bar{\alpha}z_1 - 1)(\bar{z}_2 - \alpha)}{(\alpha z_1 - 1)(\bar{\alpha}z_2 - 1) - (z_1 - \bar{\alpha})(z_2 - \bar{\alpha})} \right| \\ &= \left| \frac{\bar{\alpha}z_2\bar{z}_1 - |\alpha|^2\bar{z}_2 - \bar{z}_1 + \alpha - \bar{\alpha}z_1\bar{z}_2 + |\alpha|^2z_1 + \bar{z}_2 - \alpha}{|\alpha|^2z_1\bar{z}_2 - \alpha z_1 - \bar{\alpha}z_2 + 1 - z_1\bar{z}_2 + z_1\alpha + \bar{\alpha}z_2 - |\alpha|^2} \right| \\ &= \left| \frac{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(1 - |\alpha|^2)}{(|\alpha|^2 - 1)(z_1\bar{z}_2 - 1)} \right| = \left| \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_1\bar{z}_2 - 1} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_1 z_2 - 1} \right|, \end{aligned}$$

ce qui montre que $d_h(z_1, z_2) = d_h(r_L(z_1), r_L(z_2))$.

□

Pour établir les propriétés 3 et 4, il sera commode dans un premier temps d'introduire la notion de cercle hyperbolique.

Définition 6.23. Le **cercle hyperbolique** de **centre hyperbolique** $z_0 \in \mathcal{D}$ et de **rayon hyperbolique** $r > 0$ est l'ensemble

$$C = \{z \in \mathcal{D} \mid d_h(z, z_0) = r\}.$$

Exemple 6.24. Si $z_0 = 0$, alors

$$r = d_h(z, 0) = 2 \operatorname{arctanh}(|z|) \iff |z| = \tanh\left(\frac{r}{2}\right),$$

donc

$$C = \{z \in \mathcal{D} \mid |z| = \tanh\left(\frac{r}{2}\right)\}$$

correspond au cercle euclidien de rayon $\tanh\left(\frac{r}{2}\right)$ centré en $z_0 = 0$.

Théorème 6.25. *Un sous-ensemble C de \mathcal{D} est un cercle hyperbolique si et seulement si c'est un cercle euclidien contenu dans \mathcal{D} .*

Démonstration. Si C est centré à l'origine, le résultat est une conséquence de l'Exemple 6.24. Si le centre hyperbolique z_0 de C n'est pas l'origine, alors soit r_L la réflexion hyperbolique envoyant z_0 sur 0. Par le Théorème 6.22 et le fait que r_L est la restriction d'une transformation inversive, donc envoie un cercle généralisé sur un cercle généralisé, on a que

$$\begin{aligned} C \text{ est un cercle hyperbolique} &\iff r_L(C) \text{ est un cercle hyperbolique,} \\ &\iff r_L(C) \text{ est un cercle euclidien,} \quad \text{par l'Exemple 6.24,} \\ &\iff C \text{ est un cercle euclidien.} \end{aligned}$$

□

Remarque 6.26. Sauf si le centre hyperbolique de C est l'origine, le centre hyperbolique de C ne coïncide pas avec le centre de C en tant que cercle euclidien.

Cela nous permet d'établir les propriétés 3 et 4 comme suit.

Théorème 6.27. *La distance hyperbolique satisfait aux propriétés 3 et 4.*

Démonstration. Pour la propriété 3, qui est l'inégalité du triangle, il faut montrer que

$$d_h(z_1, z_2) + d_h(z_2, z_3) \geq d_h(z_1, z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{D}. \quad (6.2)$$

Cette inégalité est trivialement satisfaite si deux des points coïncident. On peut donc supposer que z_1, z_2 et z_3 sont distincts. Par le Théorème 6.22, quitte à appliquer une réflexion hyperbolique, on peut supposer que $z_1 = 0$. De même, quitte à interchanger z_2 et z_3 , on peut supposer que $|z_3| \geq |z_2|$. Enfin, quitte à appliquer une rotation, on peut supposer que $z_3 > 0$ est un nombre réel strictement positif. Soient alors C_1 et C_3 les cercles hyperboliques

de centre $z_1 = 0$ et z_3 et de rayons hyperboliques $r_1 = d_h(0, z_2)$ et $r_3 = d_h(z_3, z_2)$. Par la Remarque 6.26, le centre hyperbolique z_3 de C_3 ne coïncide pas avec le centre de C_3 vu comme un cercle euclidien. Soit p_1 le point où le cercle hyperbolique C_1 coupe le segment de droite (euclidien et hyperbolique) entre 0 et z_3 . Soit aussi $p_3 < z_3$ le point à gauche de z_3 où C_3 coupe la droite passant par 0 et z_3 . Comme les cercles C_1 et C_3 se coupent ou sont tangents en z_2 et qu'on suppose que $z_3 \geq |z_2| > 0$, remarquons que

$$p_3 \leq p_1 < z_3 \quad \text{et} \quad p_1 > 0.$$

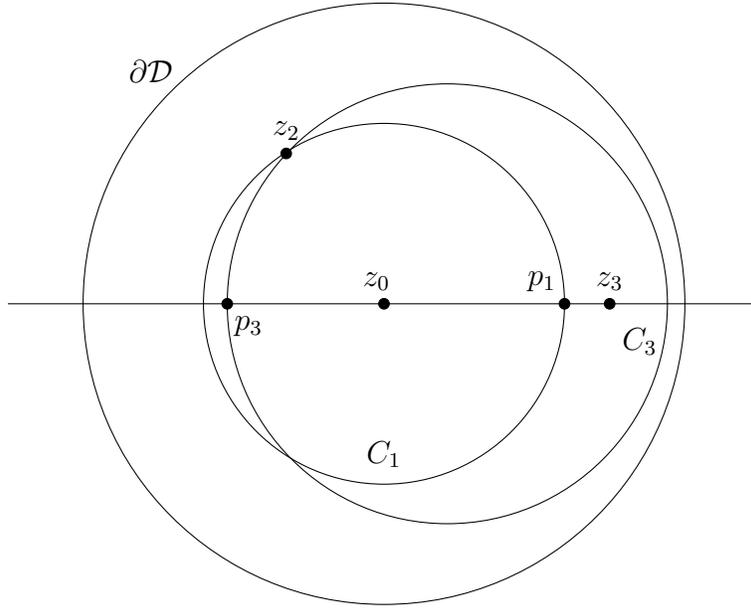


FIGURE 62 – Les cercles hyperboliques C_1 et C_3

On a donc que

$$\begin{aligned} d_h(0, z_2) + d_h(z_2, z_3) &= d_h(0, p_1) + d_h(p_3, z_3) \\ &\geq d_h(0, p_1) + d_h(p_1, z_3), \quad \text{car la distance croît le long d'une droite.} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Or, en utilisant l'identité

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x) \tanh(y)},$$

on calcule que

$$\begin{aligned} \tanh\left(\frac{d_h(0, p_1)}{2} + \frac{d_h(p_1, z_3)}{2}\right) &= \frac{|p_1| + \left|\frac{z_3 - p_1}{\bar{p}_1 z_3 - 1}\right|}{1 + |p_1| \left|\frac{z_3 - p_1}{\bar{p}_1 z_3 - 1}\right|} = \frac{p_1(1 - p_1 z_3) + z_3 - p_1}{1 - p_1 z_3 + p_1(z_3 - p_1)} \\ &= \frac{z_3(1 - p_1^2)}{1 - p_1^2} = z_3 = \tanh\left(\frac{d_h(0, z_3)}{2}\right), \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$d_h(0, p_1) + d_h(p_1, z_3) = d_h(0, z_3).$$

En substituant cette égalité dans (6.3), on obtient donc l'inégalité du triangle (6.2). Maintenant, dans (6.3), et donc dans (6.2), on a une égalité si et seulement si $p_1 = p_3$, c'est-à-dire si et seulement si $z_2 = p_1 = p_3$ est entre z_1 et z_3 sur la droite hyperbolique les joignant, d'où la propriété 4. □

6.3 Variation infinitésimale de la distance

Pour $z_0 \in \mathcal{D}$ fixé et $\Delta x > 0$ petit, on a que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{d_h(z_0, z_0 + \Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\Delta x} \operatorname{arctanh} \left(\left| \frac{z_0 + \Delta x - z_0}{|z_0|^2 + \bar{z}_0 \Delta x - 1} \right| \right) \\ &= 2 \frac{d}{dx} \operatorname{arctanh} \left(\frac{x}{||z_0|^2 + \bar{z}_0 x - 1|} \right) \Big|_{x=0} \\ &= 2 \frac{\left(\frac{1}{||z_0|^2 + \bar{z}_0 x - 1|} + \frac{x}{||z_0|^2 + \bar{z}_0 x - 1|^2} \frac{d}{dx} ||z_0|^2 + \bar{z}_0 x - 1| \right)}{1 - \left(\frac{x}{||z_0|^2 + \bar{z}_0 x - 1|} \right)^2} \Big|_{x=0} \\ &= 2 \left(\frac{1}{||z_0|^2 - 1|} + 0 \right) = \frac{2}{1 - |z_0|^2}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

En prenant $\Delta x < 0$, on obtient la même chose, de sorte que

$$d_h(z_0 + \Delta x, z_0)^2 \approx \frac{4\Delta x^2}{(1 - |z_0|^2)^2} \tag{6.5}$$

pour Δx petit. De même, pour $z = z_0 + i\Delta y$ avec Δy petit, on calcule que

$$d_h(z_0 + i\Delta y, z_0)^2 \approx \frac{4\Delta y^2}{(1 - |z_0|^2)^2}. \tag{6.6}$$

En prenant $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $|\Delta z|^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, on voit donc en utilisant le théorème de Pythagore dans la limite $|\Delta z| \rightarrow 0$ que

$$d_h(z_0 + \Delta z, z_0)^2 \approx \frac{4|\Delta z|^2}{(1 - |z_0|^2)^2} \tag{6.7}$$

pour $|\Delta z|$ petit. À la limite où $\Delta z \rightarrow 0$, on obtient la version infinitésimale de la métrique en z_0 ,

$$d_h(z_0 + dz, z_0)^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 - |z_0|^2)^2} = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |z_0|^2)^2}, \tag{6.8}$$

où $dx^2 + dy^2$ correspond à la version infinitésimale de la métrique Euclidienne en z_0 . En faisant varier z_0 , on obtient la notion suivante.

Définition 6.28. Pour $z = x + iy \in \mathcal{D}$, on dit que

$$\frac{4|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

est la **première forme fondamentale** de la distance hyperbolique. Elle décrit le comportement infinitésimal de la distance hyperbolique en z .

Ainsi, à la limite où $\Delta x \rightarrow 0^+$ et $\Delta y \rightarrow 0^+$, le rectangle $R_{z_0, \Delta x, \Delta y}$ ayant pour sommets z_0 , $z_0 + \Delta x$, $z_0 + \Delta x + i\Delta y$ et $z_0 + i\Delta y$ aura par rapport à la distance hyperbolique une aire donnée approximativement par

$$\text{Aire}(R_{z_0, \Delta x, \Delta y}) \approx \frac{4\Delta x \Delta y}{(1 - |z_0|^2)^2}.$$

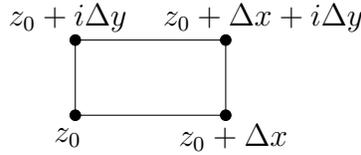


FIGURE 63 – Le rectangle $R_{z_0, \Delta x, \Delta y}$

En prenant la limite $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta y \rightarrow 0$, on obtient une formule exacte pour le rectangle infinitésimal de sommets z_0 , $z_0 + dx$, $z_0 + dx + idy$ et $z_0 + idy$,

$$\text{Aire}(R_{z_0, dx, dy}) = \frac{4dxdy}{(1 - |z_0|^2)^2}.$$

Cela suggère la définition suivante.

Définition 6.29. L'**aire hyperbolique** d'une région R de \mathcal{D} est donnée par

$$\text{Aire}_h(R) := \int_R \frac{4dxdy}{(1 - (x^2 + y^2))^2},$$

c'est-à-dire que

$$\text{Aire}_h(R) = \int_R \frac{4rdrd\theta}{(1 - r^2)^2}$$

en utilisant les coordonnées polaires. On dit que $\frac{4dxdy}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$ est la **forme d'aire hyperbolique**.

6.4 Le modèle du demi-plan de Poincaré

On considère le demi-plan

$$\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}. \quad (6.9)$$

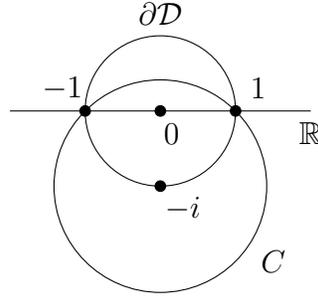


FIGURE 64 – Le cercle C de centre $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$

Lemme 6.30. *Il existe une transformation inversive envoyant le disque \mathcal{D} sur \mathbb{H}^2 .*

Démonstration. Soit C le cercle de centre $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$ dans le plan complexe.

Alors l'inversion $\widehat{\iota}_C : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ associée à C induit une transformation conforme

$$\widehat{\iota}_C : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{H}^2$$

En effet, $-i \in \partial\mathcal{D}$ est envoyé sur le point à l'infini, alors que $\widehat{\iota}_C(-1) = -1$ et $\widehat{\iota}_C(1) = 1$, donc par le Corollaire 5.41, $\widehat{\iota}_C$ envoie $\partial\mathcal{D}$ sur $\partial\mathbb{H}^2 := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Ainsi, soit \mathcal{D} est envoyé sur \mathbb{H}^2 , soit il est envoyé sur le complément de $\overline{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$. Comme $\widehat{\iota}_C(0) \in \mathbb{H}^2$, on en déduit que $\widehat{\iota}_C$ envoie bien \mathcal{D} sur \mathbb{H}^2 . □

En utilisant une telle transformation, on peut donc définir la géométrie hyperbolique sur \mathbb{H}^2 plutôt que sur le disque \mathcal{D} . Comme l'inversion $\widehat{\iota}_C$ du Lemme 6.30 préserve les angles et envoie un cercle généralisé sur un cercle généralisé, on voit dans ce cadre que les droites hyperboliques sont de la forme $C \cap \mathbb{H}^2$ avec C un cercle généralisé coupant $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ perpendiculairement.

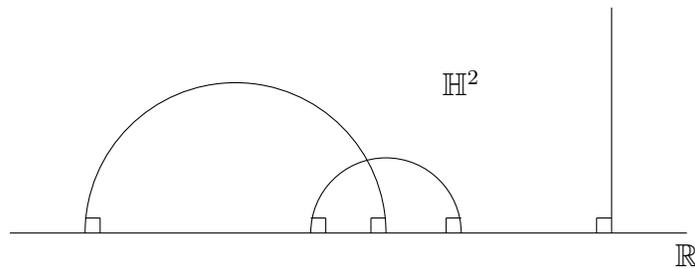


FIGURE 65 – Exemples de droites hyperboliques dans le modèle du demi-plan

Proposition 6.31. *Dans le modèle du demi-plan de Poincaré \mathbb{H}^2 , les droites hyperboliques correspondent aux droites verticales et aux demi-cercles dont le centre est sur $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.*

Démonstration. Clairement, ce sont les seuls cercles généralisés perpendiculaires à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dans le cas d'une droite verticale

$$L = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = x_0\},$$

remarquons que $L \cup \{\infty\}$ coupe bien $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ perpendiculairement à l'infini. Il suffit pour le voir de considérer l'inversion associée à un cercle centré en x_0 , l'autre point où $L \cup \{\infty\}$ et $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se coupent. \square

Sur le modèle du demi-plan de Poincaré, la première forme fondamentale de la Définition 6.28 s'écrit d'une manière différente comme le montre la proposition suivante.

Proposition 6.32. *Sur le modèle du demi-plan \mathbb{H}^2 , la forme fondamentale est donnée par*

$$g_{\mathbb{H}^2} := \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Démonstration. D'abord, on calcule que l'inversion $\widehat{\iota}_C$ du Lemme 6.30 est donnée par

$$\widehat{\iota}_C(z) = \frac{2}{z+i} - i = \frac{2}{\bar{z}-i} - i = \frac{2 - i(\bar{z}-i)}{\bar{z}-i} = \frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i}. \quad (6.10)$$

En posant $\zeta = \widehat{\iota}_C(z) \in \mathcal{D}$, on a que

$$\begin{aligned} d\zeta &= d\left(\frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i}\right) = \frac{-i d\bar{z}}{\bar{z}-i} - \frac{(-i\bar{z}+1)}{(\bar{z}-i)^2} d\bar{z} = \frac{-i(\bar{z}-i) - (-i\bar{z}+1)}{(\bar{z}-i)^2} d\bar{z} = \frac{-1-1}{(\bar{z}-i)^2} d\bar{z} \\ &= \frac{-2d\bar{z}}{(\bar{z}-i)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que

$$\frac{4|d\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2} = \frac{4\left|\frac{-2d\bar{z}}{(\bar{z}-i)^2}\right|^2}{(1-\left|\frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i}\right|^2)^2} = \frac{16|dz|^2}{(|\bar{z}-i|^2 - |-i\bar{z}+1|^2)^2}.$$

En termes des coordonnées réelles (x, y) telles que $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, on a d'autre part que

$$\begin{aligned} |\bar{z}-i|^2 - |-i\bar{z}+1|^2 &= |x-iy-i|^2 - |-ix-y+1|^2 = x^2 + (1+y)^2 - ((1-y)^2 + x^2) \\ &= (y+1)^2 - (1-y)^2 = 4y, \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\frac{4|d\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2} = \frac{16|dz|^2}{(4y)^2} = \frac{|dz|^2}{(\operatorname{Im} z)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

\square

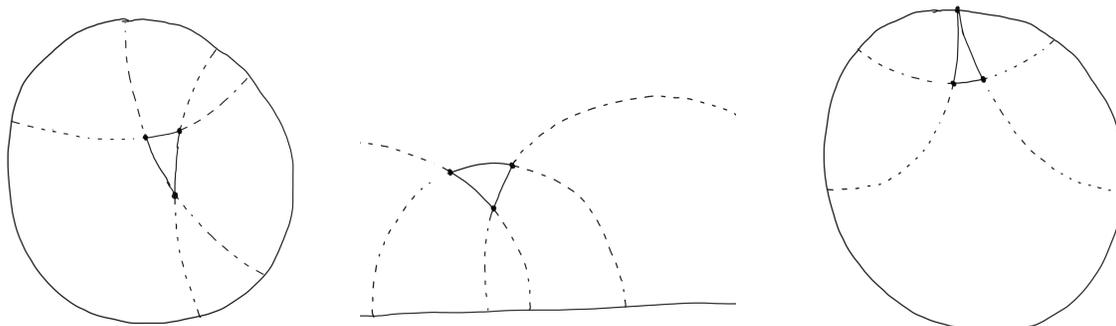
On déduit de la Proposition 6.32 que la forme d'aire hyperbolique correspondante est

$$\frac{dx}{y} \frac{dy}{y} = \frac{dx dy}{y^2}. \quad (6.11)$$

6.5 Trigonométrie hyperbolique

Comme en géométrie euclidienne et en géométrie sphérique, il y a une notion de triangle en géométrie hyperbolique.

Définition 6.33. Dans le modèle du disque, un **triangle hyperbolique** consiste en trois sommets sur $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ et trois côtés donnés par les trois segments de droites hyperboliques joignant chaque paire de sommets. Un triangle hyperbolique est dit **asymptotique** si au moins un de ses sommets est dans $\partial\mathcal{D}$. Dans ce cas, l'angle intérieur des sommets sur $\partial\mathcal{D}$ est nul, puisque les deux côtés s'y joignant sont perpendiculaire à $\partial\mathcal{D}$ en ce point.



(a) Dans le modèle du disque (b) Dans le modèle du demi-plan (c) Triangle asymptotique

FIGURE 66 – Triangles hyperboliques

En géométrie hyperbolique, on a l'analogue suivant de la Proposition 1.2 en géométrie euclidienne et du Théorèmes 4.18 en géométrie sphérique.

Théorème 6.34. Soit T un triangle hyperbolique de sommets A , B et C . Soient α , β et δ les angles intérieurs (mesurés en radians) du triangle T aux sommets A , B et C . Alors

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \text{Aire}_h(T),$$

où $\text{Aire}_h(T)$ est l'aire hyperbolique du triangle T au sens de la Définition 6.29.

Démonstration. Puisque la forme d'aire y est plus simple, il sera commode d'utiliser le modèle du demi-plan pour la démonstration. Supposons d'abord que l'un des sommets est contenu dans $\partial\mathbb{H}^2$, disons sans perte de généralité que $A = \infty$.

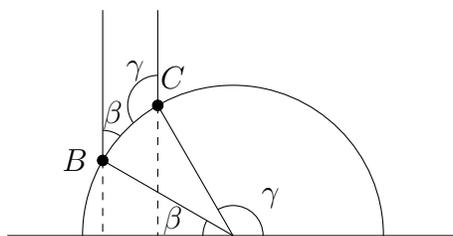


FIGURE 67 – Cas où le triangle T est asymptotique

Par définition de l'aire hyperbolique du triangle, on a que

$$\begin{aligned} \text{Aire}_h(T) &= \int_T \frac{dx dy}{y^2} = \int_{BC} \left(\int_{y(x)}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_{BC} \left(-\frac{1}{y} \Big|_{y(x)}^{\infty} \right) dx \\ &= \int_{BC} \left(0 + \frac{1}{y(x)} \right) dx = \int_{BC} \frac{dx}{y}, \end{aligned}$$

où cette dernière intégrale est le long du segment de droite hyperbolique entre B et C . Sans perte de généralité, on peut appliquer une translation horizontale $z \mapsto z + C$, qui est une isométrie de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2})$, et supposer que la droite hyperbolique BC est un demi-cercle centré en 0. En coordonnées polaires, on a $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, d'où

$$\frac{dx}{y} = \frac{\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta}{r \sin \theta} = \frac{\cos \theta dr}{r \sin \theta} - d\theta.$$

À partir de la Figure 67, on déduit donc que

$$\int_{BC} \frac{dx}{y} = \int_{\pi-\beta}^{\gamma} (-d\theta) = -\gamma + (\pi - \beta) = \pi - \gamma - \beta.$$

Comme $\alpha = 0$ dans ce cas asymptotique, cela donne bien le résultat voulu. Si aucun des sommets n'est sur $\partial\mathbb{H}^2$, on peut, en utilisant le Problème 6.2, se ramener au cas où AB est une droite horizontale tel qu'illustré à la Figure 68.

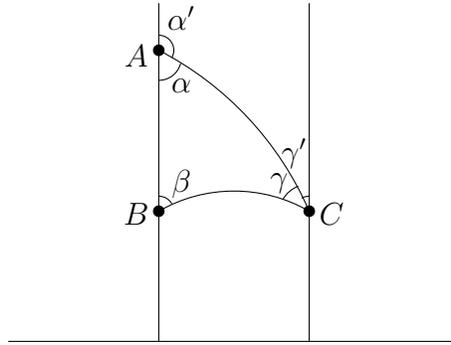


FIGURE 68 – Cas où le triangle T n'est pas asymptotique

Soit alors α' et γ' les angles internes du triangle hyperbolique $AC\infty$ en A et C . En utilisant le résultat pour les triangles asymptotiques, on a alors que

$$\begin{aligned} \text{Aire}_h(T) &= \text{Aire}_h(\triangle ABC) = \text{Aire}_h(\triangle BC\infty) - \text{Aire}_h(\triangle AC\infty) \\ &= (\pi - \beta - (\gamma + \gamma')) - (\pi - \alpha' - \gamma') \\ &= -\beta - \gamma + \alpha' = -\beta - \gamma + (\pi - \alpha), \quad \text{car } \alpha + \alpha' = \pi, \\ &= \pi - \alpha - \beta - \gamma, \end{aligned}$$

tel que voulu. □

Ce résultat donne lieu à quelques implications immédiates.

Corollaire 6.35. *Un triangle hyperbolique n'est pas isométrique à un triangle euclidien ou sphérique.*

Corollaire 6.36. *Il n'existe pas de carte plane d'une région du plan hyperbolique qui représente fidèlement les distances.*

Corollaire 6.37. *Un triangle hyperbolique ayant ses trois sommets sur $\partial\mathcal{D}$ est d'aire hyperbolique π .*

Corollaire 6.38. *La somme des angles intérieurs d'un triangle hyperbolique est toujours strictement plus petite que π .*

À une isométrie près, les angles intérieurs d'un triangle hyperbolique le spécifie complètement. Pour le voir, on aura besoin du résultat suivant.

Lemme 6.39. *Soit L une droite hyperbolique et soient L_1 et L_2 des droites hyperboliques coupant L avec le même angle en deux points distincts. Alors L_1 et L_2 sont parallèles.*

Démonstration. Par le Problème 6.2, on peut sans perte de généralité supposer que L est une droite verticale passant par l'origine dans le demi-plan \mathbb{H}^2 tel qu'illustré dans la Figure 69.

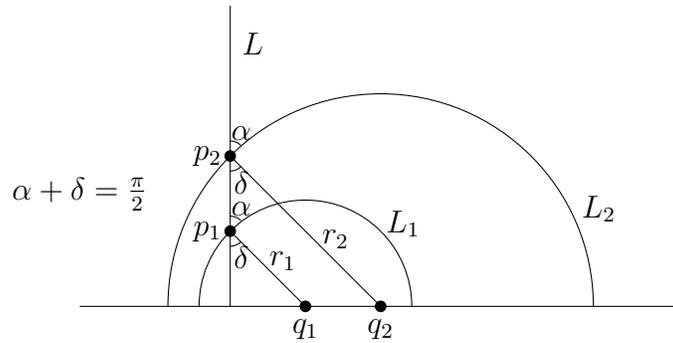


FIGURE 69 – Les droites hyperboliques L, L_1 et L_2

Soient p_1 et p_2 les points où L_1 et L_2 coupent L . Sans perte de généralité, on peut supposer que $\text{Im } p_2 > \text{Im } p_1$. Soient q_1 et q_2 les centres des demi-cercles (euclidiens) C_1 et C_2 correspondant aux droites L_1 et L_2 . Alors comme L_1 et L_2 coupent L avec le même angle, la droite euclidienne q_1p_1 est parallèle à la droite euclidienne q_2p_2 et on a que $|q_2| > |q_1|$. Quitte à appliquer la réflexion hyperbolique par rapport à la droite L , on peut en fait supposer que $q_2 > q_1 > 0$. Si r_1 et r_2 sont les rayons de C_1 et C_2 , alors par le Théorème de Thalès appliqué au triangle euclidien $0q_2p_2$ et à la droite euclidienne p_1q_1 , on voit que

$$\begin{aligned} \frac{q_2}{q_1} = \frac{r_2}{r_1} &\implies q_2 - q_1 = q_1 \left(\frac{q_2}{q_1} - 1 \right) = q_1 \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) = \frac{q_1}{r_1} (r_2 - r_1) \\ &< r_2 - r_1, \quad \text{car } q_1 = \sqrt{r_1^2 - |p_1|^2} < r_1. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
p \in C_1 &\implies |p - q_1| = r_1 \\
&\implies |p - q_2| \leq |p - q_1| + |q_2 - q_1|, \quad \text{par l'inégalité du triangle euclidienne,} \\
&\implies |p - q_2| = r_1 + q_2 - q_1 < r_1 + (r_2 - r_1) = r_2, \quad \text{par (6.12),} \\
&\implies p \notin C_2,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, donc que L_1 et L_2 sont parallèles. \square

Théorème 6.40. *Deux triangles hyperboliques sont isométriques si et seulement si leurs angles intérieurs sont les mêmes.*

Démonstration. \implies) C'est clair, puisqu'une isométrie préserve les angles.

\impliedby) Soient $T_1 = \triangle A_1 B_1 C_2$ et $T_2 = \triangle A_2 B_2 C_2$ deux triangles hyperboliques ayant les mêmes angles intérieurs. Plus précisément et sans perte de généralité, on peut supposer que les angles en A_i , B_i et C_i de T_i sont respectivement α , β et γ pour $i \in \{1, 2\}$. En utilisant des isométries hyperboliques, on peut faire coïncider A_1 avec A_2 , la droite hyperbolique $A_1 B_1$ avec la droite hyperbolique $A_2 B_2$ et la droite hyperbolique $A_1 C_1$ avec $A_2 C_2$. On peut aussi supposer que la droite hyperbolique $A_1 B_1 = A_2 B_2$ est verticale avec $A_1 \neq \infty$ et tel que $\text{Im } B_i > \text{Im } A_i$ ou $B_i = \infty$.

Dans le but d'obtenir une contradiction, supposons alors que B_2 ne coïncide pas avec B_1 . Alors par le Lemme 6.39, si $B_2 \neq \infty$, les droites hyperboliques $B_2 C_2$ et $B_1 C_1$ sont parallèles et l'un des triangles hyperboliques est strictement contenu dans l'autre, disons sans perte de généralité que

$$T_1 \subsetneq T_2 \implies \text{Aire}_h(T_1) < \text{Aire}_h(T_2),$$

en contradiction avec le fait que $\text{Aire}_h(T_1) = \text{Aire}_h(T_2) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$. Si plutôt $B_2 = \infty$, alors forcément $B_1 = \infty$, puisque l'angle intérieur de T_1 en B_1 doit être nul, donc en fait $B_1 = B_2$ à nouveau. Dans les deux cas, on voit donc que $B_1 = B_2$. De la même façon, on obtient que $C_1 = C_2$, d'où le résultat. \square

Il existe une version hyperbolique du théorème de Pythagore. Pour l'établir, il faudra faire appel au résultat suivant, laissé en exercice.

Exercice 6.41. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(2x) = \frac{1 + \tanh^2(x)}{1 - \tanh^2(x)}.$$

En prenant $x = \text{arctanh}(u)$, déduire que $\cosh(2 \text{arctanh}(u)) = \frac{1+u^2}{1-u^2}$.

Théorème 6.42 (de Pythagore hyperbolique). *Soit ABC un triangle rectangle hyperbolique, c'est-à-dire que l'un de ses angles intérieurs, disons celui en C , est droit. Soient c la longueur de l'hypoténuse et a, b les longueurs des deux autres côtés. Dans ce cas,*

$$(\cosh a)(\cosh b) = \cosh c.$$

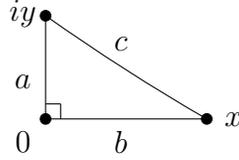


FIGURE 70 – Le triangle hyperbolique ABC

Démonstration. En travaillant dans le modèle du disque \mathcal{D} et en appliquant une transformation hyperbolique, on peut se ramener au cas où $C = 0$, $B = iy$ et $A = x$ pour $y > 0$ et $x > 0$.

La formule pour la distance hyperbolique montre alors que

$$a = 2 \operatorname{arctanh} y, \quad b = 2 \operatorname{arctanh} x \text{ et } c = 2 \operatorname{arctanh} \left(\left| \frac{iy - x}{ixy - 1} \right| \right).$$

Grâce à l'Exercice 6.41, on calcule alors que

$$\cosh(a) = \frac{1 + y^2}{1 - y^2} \quad \text{et} \quad \cosh(b) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

D'autre part,

$$\left| \frac{iy - x}{ixy - 1} \right| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + x^2y^2}},$$

donc par l'Exercice 6.41,

$$\cosh c = \frac{1 + \frac{x^2+y^2}{1+x^2y^2}}{1 - \frac{x^2+y^2}{1+x^2y^2}} = \frac{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2}{1 + x^2y^2 - x^2 - y^2} = \frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{(1 - x^2)(1 - y^2)} = (\cosh a)(\cosh b).$$

□

Remarque 6.43. Le développement en série de Taylor de $\cosh x$ est

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \approx 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{pour } x \text{ petit,}$$

donc pour a, b et c assez petits,

$$\begin{aligned} (\cosh a)(\cosh b) = \cosh c &\implies \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{2}\right) \approx 1 + \frac{c^2}{2} \\ &\implies a^2 + b^2 \approx c^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on retrouve approximativement la version euclidienne du théorème de Pythagore lorsque le triangle hyperbolique est assez petit.

6.6 Le groupe d'isométrie du plan hyperbolique

Par les Problèmes 5.6, 5.12 et 6.1, une transformation de Möbius $M : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ envoie le demi-plan \mathbb{H}^2 sur lui-même si et seulement si elle est de la forme

$$M_{\mathbb{A}} = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{pour } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}),$$

où

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}) := \{\mathbb{A} \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) \mid \det(\mathbb{A}) = 1\}.$$

Exercice 6.44. Montrer que $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$.

Proposition 6.45. *Pour $\mathbb{A} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, la transformation de Möbius associée $M_{\mathbb{A}} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ induit par restriction sur \mathbb{H}^2 une transformation hyperbolique.*

Démonstration. Si $c = 0$, $M_{\mathbb{A}}(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = t \circ h(z)$ est la composition d'une homothétie de centre 0 et d'une translation horizontale. Or, comme $ad = \det(\mathbb{A}) = 1 > 0$,

$$h(z) = \frac{a}{d}z = \frac{\frac{a}{d}}{\left(\frac{1}{z}\right)}$$

est la composée des réflexions hyperboliques $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ et $z \mapsto \frac{a}{d}$, donc est une transformation hyperbolique. De même, la translation $z \mapsto z + \frac{b}{d}$ est la composée de deux réflexions par rapport à des droites hyperboliques verticales, donc est une transformation hyperbolique. Ainsi, la restriction de $M_{\mathbb{A}}$ à \mathbb{H}^2 induit bien une transformation hyperbolique. Si plutôt $c \neq 0$, alors pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, on a que

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{A}}(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d) - ad + bc}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz + d)}, \quad \text{car } ad - bc = \det(\mathbb{A}) = 1, \\ &= \frac{a}{c} - \frac{1}{c(c\bar{z} + d)} = \frac{a}{c} + \frac{1}{(c^2(-\bar{z}) - cd)}. \end{aligned}$$

La transformation de Möbius $M_{\mathbb{A}}$ est donc la composée des applications $z \mapsto -\bar{z}$, $z \mapsto c^2z - cd$, $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ et $z \mapsto z + \frac{a}{c}$. Comme $z \mapsto -\bar{z}$ est la réflexion par rapport à la droite verticale $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z = 0\}$ et que les autres applications sont des transformations hyperboliques par la discussion précédente, on voit que $M_{\mathbb{A}}$ est à nouveau une transformation hyperbolique. \square

En combinant avec le Corollaire 5.30, cela donne le résultat suivant.

Corollaire 6.46. *Une transformation hyperbolique $t : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ est de la forme $t = M_{\mathbb{A}} \circ r_L^j$ avec $\mathbb{A} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ et $j \in \{0, 1\}$, où r_L est la réflexion hyperbolique par rapport à la droite hyperbolique*

$$L = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Re } z = 0\} \subset \mathbb{H}^2.$$

De plus, $j = 0$ si t préserve l'orientation et $j = 1$ autrement.

Corollaire 6.47. *Le groupe des transformations hyperboliques préservant l'orientation est isomorphe au groupe quotient*

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2\},$$

c'est-à-dire le groupe des transformations de Möbius associées aux matrices de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Théorème 6.48. *Le groupe $G_{\mathcal{D}}$ des transformations hyperboliques contient toutes les isométries du plan hyperbolique.*

Démonstration. On a déjà vu que chaque élément de $G_{\mathcal{D}}$ est une isométrie. Inversement, soit $t : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ une isométrie du plan hyperbolique. Quitte à la composer avec une réflexion hyperbolique, on peut supposer qu'elle préserve l'orientation. En composant avec des transformations hyperboliques à gauche et à droite, on peut aussi supposer que $t(0) = 0$. Comme t préserve l'orientation et que la différentielle de t en zéro préserve la première forme fondamentale en 0, on voit par le Problème 1.9 que cette différentiel en zéro est une rotation au sens euclidien du terme. Donc, en composant avec une rotation hyperbolique autour de l'origine, on peut supposer que la différentielle de t en $z = 0$ est l'identité. En particulier, elle envoie les droites hyperboliques passant par zéro sur elles-mêmes. En fait, puisque c'est une isométrie, elle doit fixer chacune de ces droites globalement, donc $t \equiv \mathrm{Id}$ sur \mathcal{D} globalement.

En composant avec un nombre fini de transformations hyperboliques, on s'est donc ramené au cas où $t = \mathrm{Id}$, ce qui montre que toute isométrie du plan hyperbolique est bien une transformation hyperbolique. \square

6.7 Problèmes

Problème 6.1. Montrer qu'une transformation de Möbius de la forme $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ envoie le demi-plan $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ sur lui-même si et seulement si $ab - cd > 0$.

Problème 6.2. Soient L_1 et L_2 deux droites hyperboliques. Montrer qu'il existe une transformation hyperbolique $t : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ telle que $t(L_1) = L_2$.

Problème 6.3. Soit L une droite hyperbolique et p un point de \mathcal{D} qui n'est pas sur cette droite. Montrer qu'il existe une infinité de droites hyperboliques passant par p qui sont parallèles à L .

Problème 6.4. Montrer que deux droites hyperboliques distinctes se coupent en au plus un point.

Problème 6.5. Soient $z_0 \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ et $r_L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ la réflexion hyperbolique qui envoie z_0 sur 0. Aussi, soit $R_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la rotation donnée par $z \mapsto e^{i\theta} z$.

- a) Trouver $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que la transformation hyperbolique $M := r_L \circ R_\theta \circ r_L$ soit donnée par $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.
- b) Vérifier que z_0 est un point fixe de la transformation hyperbolique M , c'est-à-dire que $M(z_0) = z_0$.

- c) Montrer que la différentielle de M en $z = z_0$ est égale à $R_{-\theta}$.
- d) Expliquer dans quel sens la transformation M peut être vue comme une rotation autour du point z_0 .

Problème 6.6. Est-ce que l'énoncé du théorème de Thalès demeure valide en géométrie hyperbolique ?

Problème 6.7. Soit \mathcal{C} un cercle hyperbolique de centre $z_0 \in \mathcal{D}$. Montrer que son centre en tant que cercle euclidien est aussi z_0 si et seulement si $z_0 = 0$.

Problème 6.8. Soient A et B deux points distincts du plan hyperbolique \mathcal{D} .

- a) Montrer que la longueur hyperbolique de l'unique segment de droite hyperbolique entre A et B correspond précisément à $d_h(A, B)$.
- b) La version hyperbolique du Théorème 4.5 dit que pour A et B suffisamment près l'un de l'autre, il existe un unique chemin de longueur hyperbolique minimale (à une paramétrisation près). En adaptant la preuve du Corollaire 4.6 au cadre hyperbolique, montrer dans ce cas que ce chemin de longueur minimale n'est autre que l'unique segment de droite hyperbolique joignant A et B .
- c) Si A et B ne sont pas forcément près l'un de l'autre, montrer que l'unique segment de droite hyperbolique entre A et B demeure le chemin le plus court entre A et B (au sens hyperbolique du terme). Indice : Relire la preuve du Corollaire 4.8.

Problème 6.9. Soit \mathcal{C} un cercle hyperbolique de rayon hyperbolique r .

- a) Montrer que l'aire hyperbolique du disque circonscrit par \mathcal{C} est donnée par

$$A_H(r) = 4\pi(\sinh \frac{r}{2})^2.$$

- b) Lorsque r est petit, est-ce que la formule euclidienne de l'aire du disque, à savoir $A_E(r) = \pi r^2$, est une bonne approximation ?
- c) Montrer que l'aire d'un disque sphérique de rayon (sphérique) $r \leq \pi$ est plutôt donnée par

$$A_S(r) = 2\pi(1 - \cos r).$$

- d) Montrer que $A_S(r) < A_E(r) < A_H(r)$ pour tout $r > 0$.
- e) En conclure qu'aucune région du plan hyperbolique ne peut être isométrique à une région du plan \mathbb{R}^2 ou de la sphère \mathbb{S}^2 .

Problème 6.10. Dans le modèle du disque $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, déterminer l'aire hyperbolique du triangle hyperbolique ayant pour sommets $A = (0, -1)$, $B = (1, 0)$ et $C = (0, 0)$.

Références

- [Aud06] Michèle Audin, *Géométrie*, EDP Sciences, 2006.
- [eJG12] D.A. Brannan M.F. Esplen et J.J. Gray, *Geometry*, Cambridge, 2012.
- [Euc] Euclide, *Les Éléments*.
- [Ser56] Jean-Pierre Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1955/56), 1–42. MR 82175

Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal
Courriel: rochon.frederic@uqam.ca