Séance de travaux pratiques I

Le jeudi 16 septembre 2021

1. Soit L la droite de $\mathbb{R}^2$ donnée par
$$L = \{(3t-4, -t-1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$
   (a) Trouver des nombres réels m et b de sorte que L a pour équation $y = mx + b$.
   (b) Trouver $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}$ de sorte que L a pour équation $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = k$.
   (c) Trouver le point de la droite L le plus proche de l'origine.
   (d) Trouver des nombres réels m' et b' tels que la droite L', obtenue en appliquant une rotation d'un angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'origine dans le sens anti-horaire à la droite L, a pour équation $y = m'x + b'$.
2. Une matrice $n \times n$ avec entrées réelles $\mathbf{A}$ est dite **orthogonale** si $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathrm{Id}$, où $\mathbf{A}^T$ est la matrice transposée de $\mathbf{A}$.
   (a) Montrer qu'une telle matrice préserve le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que $\det(\mathbf{A}) \in \{-1, 1\}$.
   (c) Montrer que $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathrm{Id}$.
3. Soit $\mathbf{M}$ une matrice symétrique $n \times n$ avec entrées réelles, c'est-à-dire telle que $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$.
   (a) Montrer que pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, on a que $\overline{\overline{\mathbf{w}}^T\mathbf{M}\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{w}}^T\mathbf{M}\mathbf{w}$.
   (b) Si $\mathbf{w}$ est une vecteur propre de $\mathbf{M}$ avec valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que $\lambda = \overline{\lambda}$, et donc qu'en fait λ est nécessairement réelle.
   (c) Si $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ sont des vecteurs propres de $\mathbf{M}$ associés à des valeurs propres distinctes, montrer que $\mathbf{w}_1^T\mathbf{w}_2 = 0$, c'est-à-dire que $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ sont orthogonaux.
   (d) En utilisant le fait qu'une matrice symétrique possède toujours une base orthonormale de vecteurs propres, montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbf{A}$ telle que la matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A}$ est diagonale.
4. Soit $\mathbf{A}$ une matrice $n \times n$ diagonalisable ayant pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.
   (a) Montrer que son déterminant est donné par le produit de ses valeurs propres :
$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$
   (b) Montrer que sa trace $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} := \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$, qui correspond à la somme des entrées sur la diagonale, est donnée par la somme des valeurs propres de $\mathbf{A}$:
$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$
   Indice : Montrer d'abord que $\mathrm{Tr}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{C}\mathbf{B})$ *pour* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *deux matrices* $n \times n$ *quelconques.*

5. Soit $\mathcal{D}$ un cercle de centre O et soient A, B et C des points distincts sur le cercle. Montrer que l'angle $\angle ACB$ est égal à la moitié de l'angle $\angle AOB$.
6. Soit AB un segment. Soit $\mathcal{D}$ le cercle de diamètre AB. Montrer que $\mathcal{D} \setminus \{A, B\}$ correspond à l'ensemble des points C tels que ABC est un triangle rectangle ayant AB pour hypoténuse.