Séance de travaux pratiques X

Le jeudi 25 novembre 2021

1. Soient C_1 et C_2 deux cercles distincts de rayons r_1 et r_2.
   (a) Montrer que C_1 et C_2 se coupent perpendiculairement si et seulement si la distance d entre leurs centres est donnée par
   $$d^2 = r_1^2 + r_2^2.$$
   (b) Si C_1 et C_2 sont plutôt concentriques, montrer que les seuls cercles généralisés coupant C_1 et C_2 perpendiculairement sont de la forme $C = L \cup \{\infty\}$ avec L une droite passant par leur centre commun.
   (c) Inversement, si L_1 et L_2 sont deux droites distinctes se coupant en P, montrer que les seuls cercles généralisés coupant L_1 et L_2 perpendiculairement sont les cercles centrés en P.

2. Soient $A, B \in \mathbb{C}$ des points distincts du plan complexe et soit $\mathcal{F}_{AB}^{\perp}$ le faisceau de cercles à points de base associé. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux membres distincts de $\mathcal{F}_{AB}^{\perp}$. Montrer qu'un cercle généralisé $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ perpendiculairement si et seulement si $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_{AB}$. *Indice : appliquer une inversion par rapport à un cercle de centre A et utiliser le numéro 1c) ci-haut.*

3. (théorème de Ptolémée[1]) Si $ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle, alors
   $$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$
   Indice : Considérer l'inversion par rapport au cercle de rayon 1 et de centre A et utiliser le numéro 3 du TP9.

4. On suppose que $P = \vec{0}$ est l'origine de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. En termes de la projection stéréographique $p_N : \mathbb{S}^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$, montrer que :
   (a) $p_N^{-1}(\mathcal{F}_P)$ corresponds à l'ensemble des latitudes de $\mathbb{S}^2$, c'est-à-dire aux cercles de la forme $\mathbb{S}^2 \cap \Pi_{z=k}$ pour $k \in (-1, 1)$;
   (b) $p_N^{-1}(\mathcal{F}_P^{\perp})$ corresponds à l'ensemble des méridiens, c'est-à-dire aux grands cercles passant par le pôle Nord et le pôle Sud.

5. Montrer qu'une transformation de Möbius $M : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ donnée par $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ envoie le cercle généralisé associé à la droite d'équation $y = 0$ sur lui-même si et seulement si $M = M_{\mathbb{A}}$ avec $\mathbb{A} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que les coefficients a, b, c et d peuvent être choisis de sorte qu'ils soient tous réels.

1. d'Alexandrie !

6. Soit C un cercle de rayon r et de centre O. La **puissance** d'un point A par rapport au cercle C est le nombre réel
$$P_C(A) := \overline{AO}^2 - r^2.$$
   (a) Montrer que $P_C(A) = 0$ si et seulement si $A \in C$ et que $P_C(A) > 0$ si et seulement si A est à l'extérieur du cercle.

   (b) Si C et C' sont deux cercles ayant des centres distincts, montrer que l'ensemble
$$\{Q \in \mathbb{R}^2 \mid P_C(Q) = P_{C'}(Q)\}$$
   est une droite. C'est **l'axe radical** des cercles C et C'.

7. Soient A et B des points distincts de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que l'axe radical de deux cercles distincts du faisceau $\mathcal{F}_{AB}^{\perp}$ correspond bien à la droite AB.

   (b) Montrer que l'axe radical de deux cercles distincts du faisceau $\mathcal{F}_{AB}$ correspond bien à la médiatrice du segment AB. *Indice : On peut appliquer une isométrie pour se ramener au cas où $A = (-a, 0)$ et $B = (a, 0)$ pour un certain $a > 0$.*

Problèmes supplémentaires : [1] : § 5.4 : 1,2,3.

Références

[1] D.A. Brannan M.F. Esplen et J.J. Gray. *Geometry.* Cambridge, 2012.