Séance de travaux pratiques XI

Le jeudi 2 décembre 2021

1. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles généralisés disjoints. Montrer qu'il existe deux points distincts $A, B \in \hat{\mathbb{C}}$ tels que tout cercle généralisé coupant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ perpendiculairement passe par A et B, c'est-à-dire appartient à $\mathcal{F}_{AB}^{\perp}$ (avec la convention que $\mathcal{F}_{A\infty}^{\perp} = \mathcal{F}_{\infty A}^{\perp} = \mathcal{F}_{A}^{\perp}$ correspond aux cercles généralisés passant par A et le point ∞ lorsque $B = \infty$).

2. (Alternative de Steiner) : Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles qui ne se coupent pas tels que $\mathcal{C}_1$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}_2$. Montrer que soit il n'existe de pas de chaîne de cercles entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de sorte que chaque cercle de la chaîne soit tangent à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et à deux autres cercles de la chaîne, soit une telle chaîne existe et le premier cercle de la chaîne peut-être choisi tangent à $\mathcal{C}_1$ en un point quelconque de $\mathcal{C}_1$.

3. Montrer qu'une transformation de Möbius de la forme $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ envoie le demi-plan $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ sur lui-même si et seulement si $ab - cd > 0$.

4. Soient L_1 et L_2 deux droites hyperboliques. Montrer qu'il existe une transformation hyperbolique $t : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ telle que $t(L_1) = L_2$.

5. Soit L une droite hyperbolique et p un point de $\mathcal{D}$ qui n'est pas sur cette droite. Montrer qu'il existe une infinité de droites hyperboliques passant par p qui sont parallèles à L.

6. Soient $z_0 \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ et $r_L : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ la réflexion hyperbolique qui envoie z_0 sur 0. Aussi, soit $R_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la rotation donnée par $z \mapsto e^{i\theta} z$.
   (a) Trouver $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que la transformation hyperbolique $M := r_L \circ R_\theta \circ r_L$ soit donnée par $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
   (b) Vérifier que z_0 est un point fixe de la transformation hyperbolique M, c'est-à-dire que $M(z_0) = z_0$.
   (c) Montrer que la différentielle de M en $z = z_0$ est égale à $R_{-\theta}$.
   (d) Expliquer dans quel sens la transformation M peut être vue comme une rotation autour du point z_0.

7. On considère les fonctions $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$. Établir les identités suivantes pour $x, y \in \mathbb{R}$:
   (a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;

(b) $\dfrac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$;

(c) $\dfrac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$;

(d) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$;

(e) $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \cosh(y)\sinh(x)$;

(f) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$.

Problèmes supplémentaires : [1] : § 6.1 : 1,2,3,4 ; § 6.2 : 2.

Références

[1] D.A. Brannan M.F. Esplen et J.J. Gray. *Geometry*. Cambridge, 2012.