Séance de travaux pratiques XII
Le jeudi 9 décembre 2021

1. (numéro 2 du Devoir 4) Sur la sphère $\mathbb{S}^2$ de rayon 1 centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les seuls cercles passant par le pôle Sud $S = (0,0,-1)$ et perpendiculaires à l'équateur $E := \mathbb{S}^2 \cap \Pi_{z=0}$ sont les méridiens, c'est-à-dire les grands cercles passant par le pôle Nord $N = (0,0,1)$ et le pôle Sud.

2. (numéro 5 du Devoir 4) Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ trois cercles dans le plan $\mathbb{R}^2$ qui sont chacun tangent aux deux autres **en des points distincts**.
   (a) Montrer qu'il existe une inversion du plan complexe étendu $\hat{\mathbb{C}}$ envoyant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur des cercles généralisés de la forme $L_1 \cup \{\infty\}$ et $L_2 \cup \{\infty\}$ avec L_1 et L_2 des droites parallèles.
   (b) Montrer qu'il existe exactement deux cercles **généralisés** qui sont chacun tangent aux trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
   (c) Montrer par un exemple que ces deux cercles généralisés chacun tangent aux trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ne sont pas forcément des cercles.

3. (Exemple 3 de [1, § 5.4, p.315]) Déterminer si les quatre points i, $1+4i$, 3 et $4+3i$ sont contenus dans un cercle généralisé commun.

4. Est-ce que l'énoncé du théorème de Thalès demeure valide en géométrie hyperbolique ?

5. Soit $\mathcal{C}$ un cercle hyperbolique de centre $z_0 \in \mathcal{D}$. Montrer que son centre en tant que cercle euclidien est aussi z_0 si et seulement si $z_0 = 0$.

6. Soient A et B deux points distincts du plan hyperbolique $\mathcal{D}$. En utilisant les propriétés de la distance hyperbolique $d : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to [0,\infty)$, en particulier les propriétés 3 et 4, montrer que l'unique segment de droite hyperbolique entre A et B est le chemin le plus court entre A et B (au sens hyperbolique du terme).

7. Soit $\mathcal{C}$ un cercle hyperbolique de rayon hyperbolique r.
   (a) Montrer que l'aire hyperbolique du disque circonscrit par $\mathcal{C}$ est donnée par
   $$A_H(r) = 4\pi(\sinh\frac{r}{2})^2.$$
   (b) Lorsque r est petit, est-ce que la formule euclidienne de l'aire du disque, à savoir $A_E(r) = \pi r^2$, est une bonne approximation ?

(c) Montrer que l'aire d'un disque sphérique de rayon (sphérique) $r \leq \pi$ est plutôt donnée par
$$A_S(r) = 2\pi(1 - \cos r).$$

(d) Montrer que $A_S(r) < A_E(r) < A_H(r)$ pour tout $r > 0$.

(e) En conclure qu'aucune région du plan hyperbolique ne peut être isométrique à une région du plan $\mathbb{R}^2$ ou de la sphère $\mathbb{S}^2$.

Problèmes supplémentaires : [1] : § 6.3 : 1,4,7a.

Références

[1] D.A. Brannan M.F. Esplen et J.J. Gray. *Geometry.* Cambridge, 2012.