Séance de travaux pratiques II

Le jeudi 23 septembre 2021

1. Soit $\mathbf{A}$ la rotation d'un angle θ autour de l'origine dans le sens anti-horaire et $\mathbf{S}$ la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   (a) Trouver la matrice $\mathbb{S}$ associée à $\mathbf{S}$ dans la base canonique $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.
   (b) Trouver la matrice $\mathbb{M}$ associée à la transformation orthogonale $\mathbf{A} \circ \mathbf{S}$ dans la base canonique.
   (c) Déterminer les valeurs propres de $\mathbb{M}$.
   (d) Déterminer les vecteurs propres correspondants.
   (e) Montrer que la matrice $\mathbb{M}$ correspond à la réflexion par rapport à la droite L d'équation :
   $$(\cos\theta)x + (\sin\theta - 1)y = 0.$$
   (f) Vérifier que $\mathbb{M}^2 = \mathbb{I}$, où $\mathbb{I}$ est l'identité, ce qui correspond géométriquement au fait qu'une réflexion est toujours son propre inverse.

2. Soit $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application orthogonale et $\mathbb{A}$ la matrice correspondante par rapport à la base canonique.
   (a) Montrer que $\mathbb{A}^T\mathbb{A} = \mathbb{I}$ (Exercice 1.14 dans les notes de cours).
   (b) Montrer que $\det(\mathbb{A}) \in \{-1, 1\}$.
   (c) Si $\det(\mathbb{A}) = 1$, montrer que $\mathbf{A}$ est une rotation autour de l'origine. Indice : Est-ce que la base orthonormale $\{\mathbf{A}\vec{\imath}, \mathbf{A}\vec{\jmath}\}$ induit la même orientation que la base canonique ?
   (d) On dénote par $SO(2)$ l'ensemble des rotations autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $SO(2)$ muni de l'opération de composition est un groupe.
   (e) Si plutôt $\det(\mathbb{A}) = -1$, montrer que $\mathbf{A}$ est une réflexion par rapport à l'origine. Indice : Utiliser le numéro 4 du Devoir I et considérer la matrice $\mathbb{A} \circ \mathbb{S}$, où $\mathbb{S}$ est la réflexion du numéro précédent.

3. Donner un exemple explicite d'une transformation affine qui ne préserve pas les angles et les longueurs.

4. (Théorème de van Aubel) Soit X un point à **l'intérieur** d'un triangle ΔABC. Supposons que AX coupe BC en P, BX coupe AC en Q et CX coupe AB en R. Montrer que
   $$\frac{\overline{AX}}{\overline{XP}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} + \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}.$$