Séance de travaux pratiques III

Le jeudi 30 septembre 2021

1. Soit ABC un triangle et X un point qui n'est sur aucune des droites prolongées AB, AC et BC. Supposons que AX coupe BC en P, BX coupe AC en Q et CX coupe AB en R.
   (a) Si
   $$\frac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} = \frac{1}{4},$$
   quelle est la valeur du rapport $\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{CA}}$?
   (b) Supposons aussi que RQ coupe BC en L. Trouver une expression pour le rapport $\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}$ en termes du rapport $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$. Indice : Utiliser le théorème de Ceva avec le point X et le théorème de Ménélaüs avec la droite RQ.
   (c) Supposons aussi que PR coupe CA en M et que PQ coupe BA en N. Montrer que L, M et N sont colinéaires.

2. Soient $\mathcal{C}$ une conique propre d'équation $P(x, y) = 0$ et L une droite donnée par
   $$L := \{\vec{v} + \lambda\vec{w} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \text{pour } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \vec{w} \neq \vec{0}.$$
   (a) Si $Q = (x_0, y_0)$ appartient à L et à $\mathcal{C}$, montrer que L est tangente à $\mathcal{C}$ en Q si et seulement si
   $$\langle \vec{w}, \nabla P(x_0, y_0)\rangle = 0,$$
   où $\nabla P(x, y) := \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right)$ est le gradient de P en (x, y).
   (b) Si $\vec{0} \in \mathcal{C}$, montrer que $P(x, y)$ est de la forme
   $$P(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy$$
   et que $\nabla P(0, 0) = (F, G)$.
   (c) Si $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une transformation affine et que L est tangente à $\mathcal{C}$ en Q, montrer que $t(L)$ est tangente à $t(\mathcal{C})$ en $t(Q)$. Indice : L'idée est d'utiliser les formules obtenues dans le numéro 1 du Devoir II. Comme le résultat est clairement vrai lorsque t est une translation, quitte à composer t par des translations à gauche et à droite, on peut se ramener au cas où $Q = \vec{0}$ est l'origine et t est une application linéaire inversible, ce qui simplifie les calculs.
   (d) Si $\mathcal{C}$ est une ellipse, alors soit L est disjointe de $\mathcal{C}$, soit L coupe $\mathcal{C}$ en deux points ou encore soit L est tangente à $\mathcal{C}$ en un point. Utiliser ce fait pour montrer d'une autre manière qu'une transformation affine envoie une droite tangente à une ellipse sur une droite tangente à une ellipse.

3. Donner une définition affine du centre d'une hyperbole. Pour toute hyperbole, montrer que le centre existe et est unique.
4. Donner un exemple d'une transformation affine autre que l'identité ou une réflexion qui envoie l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$
sur elle-même.