Séance de travaux pratiques IV

Le jeudi 7 octobre 2021

1. On définit la droite projective réelle, dénotée par $\mathbb{RP}^1$, comme étant l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine. Montrer qu'en tant qu'ensemble, le plan projectif $\mathbb{RP}^2$ peut être vu comme l'union disjointe du plan affine $\mathbb{R}^2$ avec la droite projective $\mathbb{RP}^1$. À quoi correspond $\mathbb{RP}^1$ dans cette décomposition de $\mathbb{RP}^2$?

2. Montrer qu'une droite L de $\mathbb{RP}^2$, en tant qu'ensemble de points de $\mathbb{RP}^2$, est de la forme
$$L = \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid ax + by + cz = 0\}$$
pour un certain $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. On dit que L a pour équation $ax + by + cz = 0$.

3. Montrer que la droite L passant par les points $P = [p_0 : p_1 : p_2]$ et $Q = [q_0 : q_1 : q_2]$ dans $\mathbb{RP}^2$ a pour équation
$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 0.$$
Déterminer quelle est l'équation de la droite passant par les points $[1 : 0 : 0]$ et $[1 : 1 : 1]$.

4. Dénotons par $(\mathbb{RP}^2)^*$ l'ensemble des droites de $\mathbb{RP}^2$.
   (a) Montrer que l'application $\mathcal{D} : \mathbb{RP}^2 \to (\mathbb{RP}^2)^*$ qui à $[\vec{u}] = [a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$ associe la droite $\mathcal{D}([\vec{u}])$ d'équation $ax + by + cz = 0$ est bien définie, c'est-à-dire que $\mathcal{D}([\vec{u}])$ ne dépend pas du choix de représentant $\vec{u}$, mais seulement de la classe d'équivalence $[\vec{u}]$.
   (b) Montrer que $\mathcal{D} : \mathbb{RP}^2 \to (\mathbb{RP}^2)^*$ est une bijection.
   (c) Montrer qu'en termes géométriques, cette bijection correspond à associer à une droite L de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine le plan $L^\perp$ de $\mathbb{R}^3$ perpendiculaire à cette droite et passant par l'origine.

5. Une **corrélation** (ou **dualité**) sur le plan projectif est une transformation φ des points en droites et des droites en points qui préserve l'incidence, c'est-à-dire que si le point P appartient à la droite L, alors le point $\varphi(L)$ appartient à la droite $\varphi(P)$. Une **polarité** est une corrélation φ qui est involutive, c'est-à-dire telle que $\varphi^{-1} = \varphi$.
   (a) Soit φ la transformation qui à $P \in \mathbb{RP}^2$ associe la droite $\mathcal{D}(P)$ et qui à une droite projective L associe le point $\mathcal{D}^{-1}(L)$, où $\mathcal{D}$ est l'application définie au numéro précédent. Si A,B sont des points distincts de $\mathbb{RP}^2$, montrer que $\varphi(AB)$ est le point où les droites $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ se coupent.
   (b) De même, si L_1 et L_2 sont des droites projectives distinctes, montrer que $\varphi(L_1 \cap L_2)$ est la droite passant par les points $\varphi(L_1)$ et $\varphi(L_2)$.

(c) En déduire que φ est une polarité.

6. On considère le cône $\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ dans $\mathbb{R}^3$. Si Π est un plan de $\mathbb{R}^3$ ne passant pas par l'origine, alors $\Pi \cap \mathcal{C}$ est par définition une conique propre.

   (a) Que devrait être la version projective de cette conique ?

   (b) Cette version projective dépend-elle du choix du plan Π ?