Séance de travaux pratiques V

Le jeudi 14 octobre 2021

1. Soient $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deux applications linéaires inversibles. Montrer que A et B induisent la même transformation projective si et seulement si $A = \lambda B$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. En utilisant le numéro 3 du Devoir II, expliquer comment une transformation affine de $\mathbb{R}^2$ (identifié avec le plan $\Pi_{z=1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ dans $\mathbb{R}^3$) peut être vue comme une transformation projective de $\mathbb{RP}^2$. Donner un exemple d'une transformation projective qui ne provient pas d'une transformation affine du plan $\Pi_{z=1}$.

3. Soit φ la polarité du numéro 5 du TP4, c'est-à-dire que φ est la transformation qui à $[\vec{r}] \in \mathbb{RP}^2$ associe la droite projective correspondant au plan de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine et perpendiculaire à $\vec{r}$, et qui à une droite projective correspondant à un plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$ associe le point $[a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$.
   (a) Un quadriangle est la donnée de quatre droites projectives L_1, L_2, L_3 et L_4 donnant lieu à quatre points d'intersection distincts $L_1 \cap L_2$, $L_2 \cap L_3$, $L_3 \cap L_4$ et $L_4 \cap L_1$. Montrer que φ établit une bijection entre les quadrilatères et les quadriangles de $\mathbb{RP}^2$.
   (b) Comme une transformation projective t envoie une droite sur une droite, elle induit naturellement une transformation $t : (\mathbb{RP}^2)^* \to (\mathbb{RP}^2)^*$, où on rappelle que $(\mathbb{RP}^2)^*$ dénote l'ensemble des droites projectives de $\mathbb{RP}^2$. Si $\mathbb{A}$ est une matrice inversible et $t_{\mathbb{A}} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ est la transformation projective associée, alors montrer que $\varphi \circ t_{\mathbb{A}}(P) = t_{(\mathbb{A}^T)^{-1}} \circ \varphi(P)$ pour tout point P.
   (c) Montrer qu'en géométrie projective, tous les quadriangles sont équivalents.

4. (Théorème de Brianchon) Soit $AB'CA'BC'$ un hexagone tel que les droites AB', CA' et BC' soient concourantes en P alors que les droites $B'C$, $A'B$ et $C'A$ soient concourantes en Q. Montrer alors que les droites AA', BB' et CC' joignant les sommets opposés de l'hexagone sont concourantes. Indice : Utiliser l'application φ du numéro précédent pour obtenir la version duale du théorème de Pappus.

5. Utiliser la polarité φ pour donner la version duale du théorème de Desargue.

6. Montrer qu'une transformation affine préserve les rapports de longueurs le long de droites parallèles.