Séance de travaux pratiques VI

Le jeudi 28 octobre 2021

1. On considère les points $A = [5 : 1 : 4]$, $B = [4 : 3 : 8]$ et $C = [4 : 5 : 0]$ de $\mathbb{RP}^2$.
   (a) Montrer que ces points ne sont pas colinéaires.
   (b) Déterminer si les droites projectives

$$\begin{aligned} L_A &:= \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid 5x + y + 4z = 0\}, \\ L_B &:= \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid 4x + 3y + 8z = 0\}, \\ L_C &:= \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid 4x + 5y = 0\} \end{aligned}$$

   sont concourantes.

2. Soit $t(\vec{r}) = \mathbf{A}(\vec{r}) + \vec{b}$ une transformation affine, où $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire inversible et $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Soit $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2$ l'horizon du plan affine $\Pi_{z=1}$ et considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R}^2 & \to & \Pi_{z=1} \\ & (x, y) & \mapsto & (x, y, 1) \end{array}$$

   du #3 du Devoir II, ainsi que l'inclusion $\iota : \Pi_{z=1} \to \mathbb{RP}^2$ de l'équation (3.1) des notes de cours. En s'inspirant du #3 du Devoir II, montrer qu'il existe une transformation projective $T : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ préservant la décomposition $\mathbb{RP}^2 = \iota(\Pi_{z=1}) \sqcup \mathbb{RP}^1$ et telle que

$$t(\vec{r}) = \psi^{-1} \circ \iota^{-1} \circ T \circ \iota \circ \psi(\vec{r}).$$

   On dit que T est le prolongement projectif de la transformation affine t.

3. Soit $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \Pi_{z=1} \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0\}$ une conique propre dans le plan $\Pi_{z=1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$.
   (a) Montrer que

$$\iota(\mathcal{C}) = \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0,\ z \neq 0\}.$$

   En laissant tomber la contrainte que $z \neq 0$, ce qui correspond à possiblement ajouter des points à l'infini, on obtient la **projectivisation** $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{RP}^2$:

$$\overline{\mathcal{C}} := \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0\}.$$

   (b) Montrer que l'intersection de $\overline{\mathcal{C}}$ avec l'Horizon $\mathbb{RP}^1$ de $\Pi_{z=1}$ est donnée par

$$\overline{\mathcal{C}} \cap \mathbb{RP}^1 = \{[x : y : 0] \in \mathbb{RP}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0\}.$$

(c) En utilisant la classification affine des coniques, montrer que $\overline{\mathcal{C}} \cap \mathbb{RP}^1$ est l'ensemble vide si $\mathcal{C}$ est une ellipse, contient un seul point si $\mathcal{C}$ est une parabole et contient exactement deux points si $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

(d) Montrer que $\overline{\mathcal{C}} = \{[\vec{u}] \in \mathbb{RP}^2 \mid \langle \vec{u}, M\vec{u} \rangle = 0\}$ où $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire correspondant à la matrice symétrique

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}F \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}G \\ \frac{1}{2}F & \frac{1}{2}G & H \end{pmatrix}.$$

(e) Comme $\mathbb{M}$ est symétrique, on sait que $\mathbb{M}$ est diagonalisable et que $\mathbb{R}^3$ possède une base orthonormale $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de vecteur propres de $\mathbb{M}$ avec $\mathbb{M}\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$. Soit $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application orthogonale qui envoie la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sur la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Montrer que la transformation projective t_A associée à A envoie $\overline{\mathcal{C}}$ sur

$$\overline{\mathcal{C}}_\lambda = \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0\}.$$

(f) Montrer que les constantes λ_1, λ_2 et λ_3 sont toutes différentes de zéro et qu'elles n'ont pas toutes le même signe. En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}$ des solutions de l'équation $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$ dans $\mathbb{R}^3$ est un cône (à base elliptique). *Indice : Procéder par contradiction en supposant que l'une des valeurs propres est nulle et puis en supposant que les trois valeurs propres ont le même signe.*

(g) Vérifier que l'inverse A^{-1} de l'application linéaire A envoie le cône $\mathcal{D}$ isométriquement sur un cône $A^{-1}(\mathcal{D})$ tel que $\mathcal{C} = \Pi_{z=1} \cap A^{-1}(\mathcal{D})$, de sorte que la conique $\mathcal{C}$ est bien donnée par l'intersection d'un plan et d'un cône (à base elliptique) dans $\mathbb{R}^3$.

(h) Montrer que $\overline{\mathcal{C}}$ est projectivement équivalente à la conique projective canonique

$$\overline{\mathcal{C}}_{\text{can}} = \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

(i) Cela montre qu'en géométrie projective, toutes les coniques propres sont équivalentes. En pensant en termes de sections de cônes, expliquer comment un changement de perspective permet de passer d'une ellipse à une parabole ou une hyperbole.

Problèmes supplémentaires : [1, §4.1] : #1,#2,#3.

Références

[1] D.A. Brannan M.F. Esplen et J.J. Gray. *Geometry.* Cambridge, 2012.