Séance de travaux pratiques VII

Le jeudi 4 novembre 2021

1. Montrer que deux grands cercles distincts se coupent toujours en exactement deux points distincts. Montrer aussi que ces points sont en fait **antipodaux** au sens où si l'un des points correspond au vecteur $\vec{r} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, alors l'autre correspondra au vecteur $-\vec{r}$.

2. Montrer que les isométries de $\mathbb{S}^2$, munies de l'opération de composition, forment un groupe.

3. Soient A, B, C trois points de $\mathbb{S}^2$ qui ne sont pas tous sur le même grand cercle. En insistant sur le fait que les côtés d'un triangle sphérique ne peuvent se couper qu'aux sommets du triangle[1], combien y a-t-il de triangles sphériques ayant pour sommets A, B et C ?

4. Soit $p_a : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \to \mathcal{C}$ la projection sur le cylindre

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$$

donnée par $p_a(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta) = (\cos\phi, \sin\phi, \sin\theta)$, où $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$. La projection p_a est appelée la **projection cylindrique de Lambert**.

   (a) Montrer que p_a envoie une région T de $\mathbb{S}^2$ sur une région $p_a(T)$ de même aire.

   (b) En déduire (comme Archimède !) que l'aire de la sphère est de 4π.

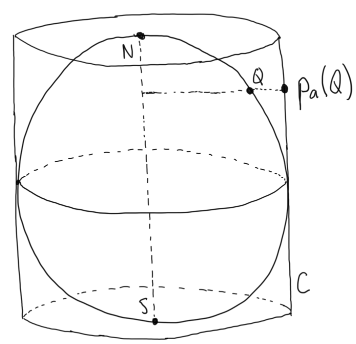

Figure 1 – La projection cylindrique de Lambert

1. Une propriété subséquemment ajoutée à la définition de triangle sphérique dans les notes de cours

5. Pour toute partition de la sphère $\mathbb{S}^2$ en triangles sphériques, montrer que $S - A + F = 2$, où S est le nombre total de sommets, A est le nombre total d'arcs de grands cercles de la partition et F est le nombre de triangles de la partition. Suggestion : Utiliser le théorème sur la somme des angles intérieurs d'un triangle sphérique.

6. (Théorème de Pythagore sphérique) Soit T un triangle sphérique de sommets A, B, C et de côtés a, b, c. Supposons que l'angle intérieur en C est de $\frac{\pi}{2}$. Soit θ_a, θ_b et θ_c les longueurs des arcs de grand cercle a, b et c respectivement. On souhaite établir l'analogue sphérique du théorème de Pythagore.
   (a) Quitte à appliquer une isométrie de $\mathbb{S}^2$, montrer qu'on peut supposer que $A = \vec{r}_1 := (\sin\theta_b, 0, \cos\theta_b)$, $B = \vec{r}_2 := (0, \sin\theta_a, \cos\theta_a)$ et $C = \vec{k} = (0, 0, 1)$.
   (b) En déduire que $\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = \langle \vec{r}_1, \vec{k} \rangle \langle \vec{r}_2, \vec{k} \rangle$.
   (c) Formuler le résultat précédent en termes des angles θ_a, θ_b et θ_c pour obtenir le théorème de Pythagore sphérique :
   $$\cos\theta_c = \cos\theta_a \cos\theta_b. \tag{1}$$
   (d) Lorsque les longueurs θ_a, θ_b et θ_c sont petites, est-ce que le théorème de Pythagore dans sa version euclidienne donne une bonne approximation de la formule (1).

7. Soient A, B, C les sommets d'un triangle sphérique T de côtés a, b, c. Alors les côtés a b et c partitionnent la sphère $\mathbb{S}^2$ en deux régions A_1 et A_2. Chacune de ces régions peut être vue comme l'intérieur du triangle. Utiliser la formule pour les aires de A_1 et A_2 en termes des angles intérieurs pour montrer que la somme des aires de A_1 et A_2 est bien l'aire de la sphère $\mathbb{S}^2$.

Problèmes supplémentaires : [1] : § 7.1 :#1,#2,#3 ; § 7.2 : #8.

Références

[1] D.A. Brannan M.F. Esplen et J.J. Gray. *Geometry.* Cambridge, 2012.