Séance de travaux pratiques VIII

Le jeudi 11 novembre 2021

1. Pour $k \neq 1$, soient $\Pi_{z=k}$ le plan d'équation $z = k$ dans $\mathbb{R}^3$ et
$$p_{N,k} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \Pi_{z=k}$$
l'application qui à $Q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ associe le point $Q' \in \Pi_{z=k}$ où la droite QN coupe le plan $\Pi_{z=k}$. Montrer que $p_{N,k}$ préserve les angles en montrant d'abord que
$$p_{N,k} \circ p_N^{-1} : \Pi_{z=0} \to \Pi_{z=k}$$
est une homothétie, donc préserve les angles, où $p_N = p_{N,0}$ est la projection stéréographique.

2. Soient $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre infini d'équation $x^2+y^2 = 1$ et $\mu : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathcal{C}$ l'application définie par $\mu(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = (\cos\phi, \sin\phi, \ln\rho)$.
   (a) Montrer que l'application μ préserve les angles.
   (b) En conclure que la projection de Mercator, définie par $M := \mu \circ p_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \to \mathcal{C}$, préserve les angles.

3. Soit
$$\begin{array}{rccc} i_E : & \mathbb{S}^2 & \to & \mathbb{S}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,y,-z) \end{array}$$
l'isométrie donnée par la réflexion par rapport au plan d'équation $z = 0$.
   (a) Montrer que l'application $\widehat{\imath}_E := p_N \circ i_E \circ p_N^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ est donnée par
$$\widehat{\imath}_E(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ \infty, & (x,y) = (0,0), \\ 0, & (x,y) = \infty. \end{cases}$$
   (b) En coordonnées complexes, montrer que $\widehat{\imath}_E(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z} = \overline{x+iy} = x - iy$ est le conjugué complexe de $z = x + iy$.

4. Déterminer l'image des droites suivantes sous l'inversion $\widehat{\imath}_E$:
   (a) La droite d'équation $y + 3x = 5$;
   (b) La droite d'équation $y + 2x = 0$.

5. L'application antipodale $\mathcal{P} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est donnée par $\mathcal{P}(\vec{u}) = -\vec{u}$.

(a) Montrer que
$$p_N \circ \mathcal{P} \circ p_N^{-1}(x,y) = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right).$$

(b) En termes de $z = x+iy$, montrer que $p_N \circ \mathcal{P} \circ p_N^{-1}(z) = -1/\overline{z}$.

6. Montrer qu'une translation de $\mathbb{R}^2$ est la composition de deux réflexions.

7. Soit $\mathbf{A} \in O(2)$ une application orthogonale et $\mathbb{A}$ la matrice associée.
   (a) Si $\det(\mathbb{A}) = 1$, montrer en utilisant le #2 du TP2 qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{A}$ correspond à la transformation $z \mapsto e^{i\theta}$ en termes de l'identification $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ avec $z = x+iy$.
   (b) Si plutôt $\det(\mathbb{A}) = -1$, montrer que $\mathbf{A}$ correspond à la transformation $z \mapsto e^{i\theta}\overline{z}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

Problèmes supplémentaires : [1, § 5.1] : 1,2,3,4.

Références

[1] D.A. Brannan M.F. Esplen et J.J. Gray. *Geometry*. Cambridge, 2012.