# Séance de travaux pratiques IX

Le jeudi 18 novembre 2021

1. Soient $A$, $B$ et $C$ trois points distincts de $\mathbb{S}^2$ qui ne sont pas contenus dans un grand cercle commun.
   (a) Parmi les quatre choix possibles de triangles du numéro 3 du TP7 ayant pour sommets $A$, $B$ et $C$, montrer qu'un seul minimise le périmètre.
   (b) Montrer que ce triangle de périmètre minimal décompose la sphère en deux régions, l'une d'elle contenant les prolongements des côtés du triangles en grands cercles et l'autre non. Par analogie avec le cas euclidien, expliquer pourquoi la seconde région devraient être considérée comme l'intérieur du triangle.
   (c) C'est véritablement seulement pour ce choix de triangle et d'intérieur qu'on a démontré le Théorème 4.18 des notes de cours. Montrer que le Théorème 4.18 est valide aussi pour les trois autres triangles de sommets $A$ $B$ et $C$. Par le numéro 7 de TP7, il suffit de montrer le résultat pour un des deux choix possibles d'intérieur.

2. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles généralisés dans $\hat{\mathbb{C}}$. Montrer qu'il existe une transformation inversive envoyant $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$. Est-ce qu'une telle transformation inversive est unique ?

3. Soient $O$, $P$ et $Q$ des points distincts de $\mathbb{R}^2$. Soient $P'$ et $Q'$ les images de $P$ et $Q$ sous l'inversion par rapport à un cercle de centre $O$ et de rayon $r$. Montrer que
$$\overline{P'Q'} = \frac{r^2}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} \overline{PQ}.$$
   Indice : Utiliser les nombres complexes.

4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $P$ dans le plan complexe. Montrer que les seuls cercles généralisés passant par $P$ et coupant $\mathcal{C}$ perpendiculairement sont de la forme $\mathcal{C}' = L \cup \{\infty\}$ avec $L$ une droite passant par $P$. Indice : Considérer $t_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$.

5. Si $\mathbb{A} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, montrer que $M_{\lambda\mathbb{A}} = M_{\mathbb{A}}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6. Une **droite complexe** $L$ de $\mathbb{C}^2$ passant par l'origine est un ensemble de la forme
$$L = \{(\lambda a_0, \lambda a_1) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$
   pour un certain $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On utilise dans ce cas la notation $L = [a_0 : a_1]$ avec la convention que $[a_0 : a_1] = [\lambda a_0 : \lambda a_1]$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La **droite projective complexe**,

dénotée par $\mathbb{CP}^1$, est par définition l'ensemble des droites complexes de $\mathbb{C}^2$ passant par l'origine. Une **transformation projective** de $\mathbb{CP}^1$ est une bijection

$$t : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$$

donnée par $t([z_0 : z_1]) = [a_{00}z_0 + a_{01}z_1 : a_{10}z_0 + a_{11}z_1]$ pour une matrice inversible $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

(a) Montrer que les transformations projectives de $\mathbb{CP}^1$ forment une groupe avec opération interne donnée par la composition. On dénote ce groupe par $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.

(b) Montrer que l'application $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{CP}^1$, définie par $\varphi(z) = [z : 1]$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $\varphi(\infty) = [1 : 0]$, est une bijection.

(c) Montrer que l'application $\varphi$ induit un isomorphisme de groupes

$$\Phi : \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \to \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$$

donné par $\Phi(M) = \varphi \circ M \circ \varphi^{-1}$.

**Problèmes supplémentaires :** [1] : § 5.1 : 5,6,7 ; § 5.3 : 1,2,4,5.

# Références

[1] D.A. Brannan M.F. Esplen et J.J. Gray. *Geometry*. Cambridge, 2012.