Devoir I

Dû le jeudi 30 janvier 2020 en classe

Instructions : Il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

1. Calculer l'intégrale $\int_D e^{x^2+y^2} dA$ sur le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. Pour $a > 0$, $b > 0$, déterminer l'aire de la région D délimitée par l'ellipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{xy}{ab} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$
en effectuant un changement de variables de la forme $\frac{x}{a} = Au + Bv, \quad \frac{y}{b} = Cu + Dv$.
3. Pour $a > 0, b > 0$ et $c > 0$, calculer le volume de chacun des deux solides que le plan d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ engendre en coupant la région délimitée par l'ellipsoïde d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$
4. Pour $s > 0$ montrer que $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ en utilisant l'intégration par parties. Utiliser ce résultat pour établir par récurrence que $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, montrer que $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1} d\theta = \frac{((n-1)!(m-1)!)}{(n+m-1)!}$. Indice : Utiliser les fonctions Γ et β.
6. Pour $a > 0$, déterminer le volume du solide
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \quad x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} \leq a^{\frac{1}{3}}\}$$
en effectuant d'abord le changement de variables $x = u^6, y = v^6, z = w^6$, puis en passant aux coordonnées sphériques.
7. Pour $a > 0$, calculer l'aire de la surface courbe
$$\mathcal{S} = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, \quad z = x^2 + y^2\}.$$
8. Déterminer les lignes de champ (à savoir, l'image des courbes intégrales) du champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ en utilisant la méthode du numéro 8 de la deuxième séance de travaux pratiques.
9. Déterminer les surfaces équipotentielles du champ vectoriel conservatif
$$\vec{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$
10. Déterminer si le champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ est conservatif et trouver un potentiel le cas échéant.