Devoir II

Dû le jeudi 9 avril 2020 par courriel

Instructions : Il y a 5 problèmes. Chaque problème vaut vingt points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. Soit $\vec{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$ le champ de vitesses d'un solide en rotation autour de l'axe des z à la vitesse angulaire ω.
   (a) Calculer $\nabla \times \vec{v}$.
   (b) Si $\vec{F}$ représente le champ de vitesses d'un fluide, quelle condition sur le rotationnel de $\vec{F}$ nous assure qu'il n'y a pas de tourbillon dans le fluide ?

2. En utilisant le théorème de Green, évaluer l'intégrale $\oint_{\mathcal{C}} (x^2 - xy)dx + (xy - y^2)dy$, où $\mathcal{C}$ est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,1)$ et $(2,0)$ parcouru dans le sens anti-horaire.

3. On considère l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ où $\mathcal{C}$ est l'ellipse d'équation
$$x^2 + y^2 = 1, \quad x + z = 1.$$
   (a) Calculer cette intégrale en utilisant le théorème de Stokes.
   (b) Vérifier votre réponse en calculant l'intégrale directement.

4. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire et orientation usuels. Montrer que l'opérateur de Hodge sur les 1-vecteurs,
$$* : \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \to \Lambda^1(\mathbb{R}^2),$$
correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

5. Soit $\vec{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que
$$d(F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy) = (\nabla \cdot \vec{F}) dx \wedge dy \wedge dz.$$
   (b) Montrer que
$$d(F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \mathbf{i}) dy \wedge dz + ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \mathbf{j}) dz \wedge dx + ((\nabla \times \vec{F}) \cdot \mathbf{k}) dx \wedge dy.$$
   (c) Utiliser l'identité $d(d\omega) = 0$, satisfaite pour toute forme différentielle ω, pour re-démontrer l'identité $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$.