Séance de travaux pratiques I

Le jeudi 16 janvier 2020

1. Pour $a > 0$, donner une interprétation géométrique de l'intégrale double $\int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dA$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Utiliser cette interprétation pour déterminer la valeur de l'intégrale.
2. Calculer les intégrales doubles suivantes :
   (a) $\int_0^1 \int_0^y (xy + y^2)dxdy$;
   (b) $\int_D (x^2 + y^2)dA$, où $D = [0, a] \times [0, b]$;
   (c) $\int_D (x - 3y)dA$, où D est le triangle ayant pour sommets $(0, 0)$, $(a, 0)$ et $(0, b)$;
   (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$.
3. Déterminer si les intégrales impropres suivantes sont convergentes et calculer leur valeur le cas échéant :
   (a) $\int_D \frac{dA}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$, où D est le premier quadrant du plan ;
   (b) $\int_D \frac{dA}{1 + x + y}$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1\}$.
4. Évaluer les deux itérations possibles de l'intégrale impropre $\int_D \frac{x - y}{(x + y)^3}dA$, où D est le rectangle $[0, 1] \times [0, 1]$. Montrer d'autre part que cette intégrale impropre ne converge pas en considérant la même intégrale restreinte au domaine $T = \{(x, y) \in D \mid y \leq x\}$.
5. Calculer les intégrales doubles suivantes sur le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ de rayon $a > 0$:
   (a) $\int_D \sqrt{x^2 + y^2}dA$;
   (b) $\int_D \frac{dA}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
   (c) $\int_D |x|dA$.
6. Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{R}$ l'intégrale impropre $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dA}{(1 + x^2 + y^2)^p}$ converge-t-elle ?
7. Déterminer le volume de la région contenue dans l'intérieur de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = ax$.