Séance de travaux pratiques X

Le jeudi 16 avril 2020

1. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ un domaine contractile. Montrer que pour tout champ vectoriel $\vec{E}$ sur $\mathcal{U}$, $\vec{E}$ est incompressible (i.e. $\nabla \cdot \vec{E} = 0$) si et seulement si $\vec{E}$ admet un potentiel vecteur, c'est-à-dire un champ de vecteurs $\vec{A}$ tel que $\vec{E} = \nabla \times \vec{A}$. Indice : Utiliser le numéro 5 du devoir II.

2. Sur le domaine $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^3$, on considère la 2-forme

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \right).$$

   (a) Montrer que la 2-forme ω est fermée.

   (b) En termes des coordonnées sphériques

$$\begin{array}{rlcl} \psi: & (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (0,\pi) & \to & \mathcal{U} \\ & (\rho, \theta, \varphi) & \mapsto & (\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho\cos\varphi), \end{array}$$

   montrer qu'on a $\psi^*\omega := \sin\varphi d\varphi \wedge d\theta$.

   (c) Soit $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ la sphère de rayon 1 centrée à l'origine. Au sens de l'équation (2) du TP9 (ou de la définition du cours du jeudi 16 avril), l'intégrale de ω sur $\mathbb{S}^2$ avec son orientation usuelle (champ normal unitaire pointant vers l'extérieur) est donnée par

$$\int_{\mathbb{S}^2} \omega = \int_D \sin\varphi d\varphi d\theta, \tag{1}$$

   où $D = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi\}$. Quelle est la valeur de cette intégrale ?

   (d) En utilisant le théorème de Stokes sous la forme du numéro 5b du TP9 avec $\mathcal{S} = \mathbb{S}^2$ et $\mathcal{C} = \emptyset$, conclure que la 2-forme ω n'est pas exacte.

   (e) En déduire que le domaine $\mathcal{V}$ n'est pas contractile.

3. Sur $\mathcal{U} := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on considère la 1-forme $\lambda := \dfrac{-ydx}{x^2+y^2} + \dfrac{xdy}{x^2+y^2}$.

   (a) Montrer que λ est une 1-forme fermée.

   (b) Dans la région $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$, c'est-à-dire la région où $x \neq 0$, montrer que la 1-forme λ est exacte. Indice : Considérer la fonction $\theta := \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

   (c) Calculer $\int_{\mathcal{C}} \lambda$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de rayon 1 centré à l'origine parcouru dans le sens anti-horaire.

(d) Montrer que λ n'est pas une forme exacte sur $\mathcal{U}$ en utilisant le calcul précédent.

(e) Soit $\mu \in \Omega^1(\mathcal{U})$ une 1-forme fermée. Soient $\mathcal{C}_a$ le cercle de rayon a centrée à l'origine parcouru dans le sens anti-horaire. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_a} \mu$ ne dépend pas de a en utilisant le théorème de Green sous la forme du numéro 3b du TP9.

(f) Si $\mu \in \Omega^1(\mathcal{U})$ est une 1-forme fermée telle que $\int_{\mathcal{C}} \mu = 0$, montrer que μ est exacte. Indice : Considérer la fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ qui au point (x, y), correspondant à (r, θ) en coordonnées polaires, associe

$$f(x,y) = \int_{\mathcal{L}_\theta} \mu + \int_{\mathcal{L}_r} \mu,$$

où $\mathcal{L}_\theta$ est la courbe allant de $(1, 0)$ à $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ le long de $\mathcal{C}$ parcouru dans le sens anti-horaire et $\mathcal{L}_r$ est le segment de droite allant de $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ à (x, y). Vérifier que f n'est pas discontinue sur $\{(x, y) \in \mathcal{U} \mid y = 0, x > 0\}$.

(g) Si $\mu \in \Omega^1(\mathcal{U})$ est une 1-forme fermée, montrer que $\mu - c\lambda$ est exacte si on prend $c = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mu$.

(h) En conclure que le premier groupe de cohomologie de de Rham $H^1(\mathcal{U})$ est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe d'équivalence de λ.