Séance de travaux pratiques II

Le jeudi 23 janvier 2020

1. (reprise du (TP1, #6)) Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{R}$ l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dA}{(1+x^2+y^2)^p}$ converge-t-elle ?
2. Donner une description du point $(2, -2, 1)$ en termes des coordonnées cylindriques et des coordonnées sphériques.
3. Calculer le volume de la région située au-dessus de la surface d'équation $z = (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}$ et à l'intérieure de la sphère de rayon $\sqrt{2}$ centrée à l'origine.
4. Évaluer $\int_R (x^2+y^2+z^2)dV$ où $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, \quad x^2+y^2 \leq a^2\}$.
5. Évaluer les intégrales $\int_B x dV$ et $\int_B z dV$, où B est la boule de rayon a centrée à l'origine restreinte au premier octant.
6. Pour quelles valeurs de λ et μ l'intégrale $\displaystyle\int\int_{\mathbb{R}^3}\int \frac{dxdydz}{(x^2+y^2)^\lambda(1+x^2+y^2+z^2)^\mu}$ converge-t-elle ?
7. Pour $a > 0$, calculer l'aire de la surface courbe
$$\mathcal{S} = \{(x,y,z)) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0, \quad z = xy\}.$$
8. Si $\vec{r}(t)$ est une paramétrisation d'une ligne de champ de $\vec{F}(x,y,z)$, alors $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \lambda(t)\vec{F}(\vec{r}(t))$ pour une certaine fonction $\lambda(t)$ ($\lambda(t) \equiv 1$ quand c'est la paramétrisation de la courbe intégrale). Cela implique que le long d'une ligne de champ, on a la relation différentielle
$$\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}.$$
Si la multiplication de ces équations par une fonction les met sous la forme $P(x)dx = Q(y)dy = R(z)dz$, on peut alors intégrer pour trouver les équations des lignes de champ. Utiliser cette méthode pour déterminer les lignes de champ des champs de vecteurs suivants :
   (a) $\vec{F}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$;
   (b) $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(1+z^2)(x^2+y^2)}$.
9. Déterminer si les champs de vecteurs suivants sont conservatifs et trouver un potentiel le cas échéant :
   (a) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2+y^2}$;
   (b) $\vec{F}(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}(xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$.